

ГРАВІТАЦІЯ І СПІН

Роман ПЛЯЦКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів 79060
e-mail: plyatsko@lms.lviv.ua

Редакція отримала статтю 16 червня 2013 р.

Описано історію досліджень спіну-гравітаційної взаємодії у Львові, початки якої безпосередньо пов'язані з роботою наукового семінару з математичних проблем загальної теорії відносності, ініційованого В. Я. Скоробогатьком і М. Т. Сеньківим 1971 р. В центрі уваги рівняння Матісона-Папапетру та їхні фізичні наслідки для ультрарелятивістських часток зі спіном у гравітаційних полях чорних дір. Обговорено ситуацію із виконанням принципу відповідності між загальноковаріантним рівнянням Дірака і рівняннями Матісона-Папапетру.

1. ВСТУП

Формування у Львові напрямку досліджень у царині теоретичної фізики, спрямованих на з'ясування впливу спіну (внутрішнього кутового моменту) часток (макроскопічних тіл) на їх поведінку в гравітаційному полі згідно із загальною теорією відносності, безпосередньо пов'язане з роботою наукового семінару з математичних проблем цієї теорії, започаткованому 1971 р. В. Я. Скоробогатьком і М. Т. Сеньківим на кафедрі теоретичної фізики Львівського університету імені Івана Франка. В той час у поле зору одного із перших учасників цього семінару, тоді студента В. Пелиха, потрапила монографія О. С. Іваницької, присвячена формулюванню загальної теорії відносності в локальних ортореперах. Реферування цієї монографії стало темою курсової роботи автора цих рядків, запропонованою М. Т. Сеньківим. У цьому зв'язку переддипломна практика проходила в Мінську, в Інституті фізики АН Білорусі, під керівництвом О. С. Іваницької. Вона ж запропонувала ознайомитись із статтею А. Папапетру [1], який методом Фока отримав систему рівнянь, що описують рух макроскопічного пробного тіла з внутрішнім обертанням у гравітаційному полі в рамках айнштайнівської теорії тяжіння. Нашим конкретним завданням було отримання з цих рівнянь деяких фізичних наслідків – поправок до відомих класичних ефектів теорії, зумовлених спіном. Це згодом визначило й тему кандидатської дисертації: “Ефекти айнштайнівської теорії тяжіння, зумовлені коливаннями та спіном пробного тіла”, виконаної під час навчання в аспірантурі в ІФ АН Білорусі під керівництвом О. С. Іваницької, захищеної 1979 р.

А. Папапетру не був першим, хто отримав рівняння для опису рухів пробного тіла зі спіном у загальній теорії відносності. На 14 років раніше піонерську роботу опублікував М. Матісон [2]. Однак оскільки видання [1] було більш відомим у науковому світі, ніж [2], в літературі набула поширення назва для цих рівнянь “рівняння Папапетру” і лише згодом почали вживати термін “рівняння Матісона-Папапетру” (надалі скорочено МП). Все ж, імовірно, визначальним тут було некоректне зауваження із статті [1]: “It has been noticed already when the general pole-dipole particle has been discussed in special relativity (Mathisson 1937 ...)”. Воно створювало у читача враження, що в [2] представлені рівняння лише для тривіального випадку, коли гравітаційне поле відсутнє, що насправді не так. У цьому контексті зазначимо, що навіть у відомій монографії [3] відсутня згадка про Матісона і його працю [2]. Врешті, поверненню із забуття чи напівзабуття імені Мирона Матісона (1897-1940) посприяла присвячена йому конференція, проведена 2007 р. у Варшаві, з опублікуванням праць її учасників [4]. За ухвалою конференції, німецькомовна стаття Матісона [2] перевидана англійською мовою в серії “Golden Oldies” відомого журналу [5]. Водночас матеріали видання [4] розкривають масштаб наукового доробку й висвітлюють життєвий шлях М. Матісона, який народився у Варшаві, працював у Варшавському університеті (1932-1935), за рекомендацією А. Айнштейна, Ж. Адамара і П. Ланжевена отримав посаду професора й першого завідувача кафедри теоретичної фізики Казанського університету (1936-1937) і спішно повернувся до Варшави, щоб уникнути політичних репресій. У 1939 р. виїхав до Парижа, де співпрацював з Адамаром, а згодом до Кембриджа, де й помер у віці 43 років. Некролог за підписом П. Дірака, який високо цінував науковий доробок Матісона, помістив відомий журнал “Nature” [6]. Ще 1929 р. Матісон започаткував листування з А. Айнштайном, а загалом епістолярій між ними налічує декілька десятків листів. У 1930 р. Айнштайн запропонував Матісону переїхати до Берліна для співпраці, однак Матісон відмовився, вважаючи себе ще недостатньо кваліфікованим. У 1936 р. надійшла пропозиція від Айнштейна попрацювати з ним якийсь час у Принстоні, однак тоді Матісон уже визначився із працевлаштуванням у Казанському університеті.

Для своєї статті [2] Матісона обрав заголовок “Нова механіка матеріальних систем”, однак розкриття суті й важливості цієї новизни стало завданням інших дослідників. Зокрема, А. Папапетру та Е. Коріналдесі вивчили вплив обертання планет на їхній рух навколо Сонця й переконались у його мізерності [7]. Подібні оцінки отримали інші автори, аналізуючи різні траєкторії частки (пробного тіла) зі спіном у гравітаційних полях Шварцшильда та Керра. Як певний підсумок, в [3] констатовано, що в природі існують хіба що два випадки, коли ефекти взаємодії спіну з гравітаційним полем можуть бути значними: 1) коли нейтронна зоря або чорна діра, що швидко обертаються, перебувають в полі іншої нейтронної зорі або чорної діри і 2) коли електрон (або ж інша частка зі спіном) відчуває вплив гравітаційного поля чорної діри на пізній фазі її колапсу. Водночас цікаве припущення було висловлене в [8]: “The simple act of endowing a black hole with angular momentum has led to an unexpected richness of possible physical phenomena. It seems appropriate to ask whether endowing the test body with intrinsic spin might not also lead to surprises”. Однак ні в [8], ні в інших публікаціях на цю тему жодних сюрпризів не виявили.

Наші систематичні дослідження фізичних наслідків рівнянь МП роз-

почались у середині 1970-их із спроб відшукати їхні нові часткові розв'язки для метрики Шварцшильда. На той час були відомі такі аналітичні розв'язки цих рівнянь, що описують радіальний рух частки зі спіном або ж її колові орбіти в цьому полі. З'ясувалось, що в першому випадку рух є точно геодезійним, тобто збігається з радіальним рухом частки без спіну. У другому випадку розглядалися не точні рівняння МП, а їхнє наближення з метою знайти лінійні за спіном поправки до колових геодезійних орбіт.

Завдання пошуку нових аналітичних розв'язків ставилось одразу для точних рівнянь МП. Нескладний аналіз показав, що екваторіальні колові орбіти частки зі спіном у полі Шварцшильда, коли б спін не був ортогональним до площини руху, не існують. Тому природно постало питання, чи допускають рівняння МП у цьому ж полі колові орбіти поза екваторіальною площиною за орієнтованого певним чином спіну. У підсумку було з'ясовано, що такі орбіти існують в просторовій області неподалік поверхні горизонту, коли $r < 1,5r_g$, де r – радіальна шварцшильдова координата, r_g – її значення на поверхні горизонту [9, 10]. Тут важливим моментом є те, що необхідною умовою руху по цих орбітах є близькість на них швидкості частки до швидкості світла, тобто їхній ультрарелятивістський характер. У цьому контексті варто згадати проведений в [11] аналіз можливості іншого фізичного ефекту – коли б частка зі спіном згідно з рівняннями МП перебувала нерухомо відносно джерела гравітаційного поля Керра за рахунок гравітаційної спін-спінової взаємодії (метрика Керра враховує внутрішній кутовий момент маси, що її створює). Виявилось, що такий ефект статичного зависання частки зі спіном над керрівською масою неможливий. Натомість згідно з [9, 10] рівняння МП допускають ефект динамічного зависання, коли частка кружляє з ультрарелятивістською швидкістю над шварцшильдівським джерелом. Згодом аналогічний ефект був узагальнений для керрівського джерела поля [12, 13], що вимагало значного обсягу обчислень, у виконанні яких брав активну участь А. Л. Винар – тоді аспірант, а згодом співробітник відділу, керованого В. Я. Скоробогатьком в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Результати, викладені в [9, 10, 12], можна було трактувати як такі, що підтверджують вказане вище припущення з [8] про те, що взаємодія спіну частки з гравітаційним полем може призвести до несподіваних впливів на її поведінку в гравітаційному полі. Однак ще необхідно було провести поглиблений аналіз фізичного змісту отриманих часткових розв'язків точних рівнянь МП, зокрема тому, що ці рівняння необхідно доповнювати деякою додатковою умовою, вибір якої не є однозначним. Про це йтиметься нижче.

2. РІВНЯННЯ МП І ДОПОВНЯЛЬНА УМОВА

Рівняння МП мають вигляд [1, 2]:

$$\frac{D}{ds} \left(mu^\lambda + u_\mu \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} \right) = -\frac{1}{2} u^\pi S^{\rho\sigma} R_{\pi\rho\sigma}^\lambda, \quad (1)$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{ds} + u^\mu u_\sigma \frac{DS^{\nu\sigma}}{ds} - u^\nu u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} = 0, \quad (2)$$

де $u^\lambda \equiv dx^\lambda/ds$ – 4-швидкість частки, $S^{\mu\nu}$ – її тензор спіну, m і D/ds – відповідно маса і коваріантна похідна, $R^\lambda_{\pi\rho\sigma}$ – тензор Рімана кривини простору-часу.

Система рівнянь (1), (2) неповна (кількість невідомих функцій перевищує кількість незалежних рівнянь), тому фіксованим початковим значенням координат, швидкості і спіну відповідає не один, а безліч її розв'язків. Це пов'язано з тим, що рівняння (1), (2) є саме такими без конкретизації точки, відносно якої обчислюється кутовий момент частки (тіла) і рух якої описує переміщення тіла в просторі як цілого. Коли йдеться про кутовий момент, що характеризує обертання частки відносно власної осі, за таку репрезентативну точку необхідно вибирати центр маси частки. Однак відомо, що в релятивістській механіці розташування центра маси тіла, що обертається відносно своєї осі, залежить від системи відліку [14]. Тому співвідношення

$$S^{\lambda\nu}u_\nu = 0, \quad (3)$$

нерелятивістський аналог якого ідентифікує центр маси тіла, за умови релятивізму виділяє не одну точку-центр, а множину центрів маси [15]. Тому рівняння (1)–(3) в просторі Мінковського поряд із розв'язками, що описують прямолінійні рухи, мають ще й розв'язки у вигляді спіральних (зокрема колових) ліній [16, 17]. Однак такого роду зайві розв'язки відсутні, якщо замість умови (3) використати співвідношення

$$S^{\lambda\nu}P_\nu = 0, \quad (4)$$

де

$$P^\nu = mu^\nu + u_\lambda \frac{DS^{\nu\lambda}}{ds} \quad (5)$$

є 4-імпульсом частки, загалом не паралельним до її 4-швидкості. Співвідношення (3) і (4) називають відповідно доповняльною умовою Матісона-Пірані й Тульчієва-Діксона.

Як показано в [18], у тих випадках, коли вплив спіну частки на її рух у гравітаційному полі можна описати малими поправками до відповідного геодезійного руху, використовуючи розвинення у степеневий ряд за спіном, розв'язки рівнянь (1), (2) за умови (4) близькі до неосциляційних розв'язків цих рівнянь за умови (3), відрізняючись лише нелінійними за спіном членами. Однак ситуація суттєво змінюється, якщо швидкість частки стає ультрарелятивістською і вплив спіну на її рух перестає бути малим. У цьому контексті звернемо увагу на статтю [19], де розглянуто рівняння МП для спінової частки нульової маси спокою. При цьому було показано, що за умови (3) така частка рухається по ізотропних геодезійних лініях, а її спіні спрямований вздовж напрямку руху, як це властиво фотону. Зазначена властивість порушується, якщо застосувати умову (4). На цій підставі в [19] констатовано, що умова (3) адекватна для опису рухів безмасових часток зі спіном, тоді як умова (4) – для спінових часток ненульової маси. Однак недавні дослідження, результати яких подано в [20, 21], показують, що умова (4) стає незастосовною і в тих випадках, коли частка ненульової маси рухається з високою швидкістю відносно джерела гравітаційного поля – вищою від деякого критичного значення. Точніше, якщо частка зі

спіном рухається відносно джерела поля Шварцшильда з ультрарелятивістською швидкістю, що відповідає релятивістському γ - фактору Лоренца порядку $1/\varepsilon$, де ε – малий параметр пробності частки, означений як

$$\frac{|S_0|}{mr} \equiv \varepsilon \ll 1 \quad (6)$$

(тут $|S_0|$ – абсолютна величина спіну частки, інтеграл її руху; r – радіальна координата), то при застосуванні умови (4) компоненти 4-імпульсу набувають уявних значень, хоч 4-швидкість залишається часоподібною. Це впливає з точних аналітичних співвідношень між P^λ і u^λ , записаних для екваторіальних рухів частки зі спіном, ортогональним до площини руху, згідно з рівняннями (1), (2), (4). У зв'язку з цим стають зрозумілими результати досліджень [22], за якими в полі Шварцшильда рівняння МП з умовою (4) мають розв'язки, що описують прискорення частки зі спіном до швидкостей, вищих за швидкість світла. Для коректної інтерпретації цих результатів необхідно брати до уваги той факт, що умова (4) має свої межі застосування в області ультрарелятивістських швидкостей.

У статті [23] розвинуто й деталізовано аналіз осциляційних розв'язків рівнянь МП за умови (3), започаткований в [14]. При цьому акцентовано увагу на коректній інтерпретації їхнього фізичного змісту. Зазначено, що саме за умови (3) вдається виявити глибшу аналогію між гравітаційною та електромагнітною взаємодіями із використанням понять гравітоелектричних і гравітомагнітних компонент єдиного гравітаційного поля.

Як показано у низці публікацій [24], важливо, що рівняння (1), (2) у лінійному за спіном наближенні впливають із загальнорелятивістського рівняння Дірака [25] як деяке класичне (неквантове) наближення.

У [26] рівняння МП узагальнено з тим, щоб додатково до дипольного моменту врахувати ще й квадрупольний момент частки. Таке узагальнення відоме під назвою рівнянь Матісона-Папапетру-Діксона.

3. ЧОМУ ВАЖЛИВИЙ ФАКТОР ШВИДКОСТІ?

Стосовно фізичної причини, яка призводить до відхилення траєкторії пробної частки зі спіном від геодезійної траєкторії, згідно із рівняннями МП конкретні результати отримано в [11] та інших публікаціях. Звернуто увагу на існуючу аналогію між гравітаційною та електромагнітною взаємодіями, зокрема в тому, що подібно до того, як електрично заряджена частка з внутрішнім обертанням наділена магнітним полем, так і незаряджена маса з внутрішнім обертанням створює додатково до того гравітаційного поля, що властиве масі без обертань, що й так зване гравітомагнітне поле. Тоді при русі такої маси, наприклад, в гравітаційному полі Шварцшильда, проявляється вплив гравітаційної спін-орбітальної взаємодії – подібно як при русі класичного електрона навколо зарядженого ядра виникає електромагнітна спін-орбітальна взаємодія. Такого роду ефекти, як і гравітаційні спін-спінові ефекти у випадку поля Керра, в [11] розглянуто для швидкостей частки зі спіном відносно масивного тіла, невеликих порівняно із швидкістю світла.

Чому висока швидкість частки важлива для спін-гравітаційних ефектів? Для відповіді на це запитання можна забути на деякий час про рівняння МП і розглянути одну ситуацію, яка, в певному сенсі, подібна до

того, що добре відомо в класичній електродинаміці – йдеться про електромагнітне поле рухомого електричного заряду. Тепер ми цікавимося гравітаційним полем рухомої маси. Точніше, проаналізуємо вирази для компонент тензора Рімана за оцінкою спостерігача, який рухається з довільною швидкістю відносно шварцшильдівської маси. Для математичного опису руху такого спостерігача використаємо набір ортонормованих тетрад $\lambda^\mu_{(\nu)}$ (на відміну від індексів глобальних координат, індекси локальних координат поміщаємо в круглі дужки). Тоді зв'язок локальних (тетрадних) компонент тензора Рімана з його глобальними компонентами має вигляд

$$R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = \lambda^\pi_{(\alpha)} \lambda^\rho_{(\beta)} \lambda^\sigma_{(\gamma)} \lambda^\tau_{(\delta)} R_{\pi\rho\sigma\tau}. \quad (7)$$

Услід за авторами багатьох публікацій, присвячених поглибленому вивченню аналогій між гравітацією та електромагнетизмом, розглянемо гравітоелектричні $E_{(k)}^{(i)}$ і гравітомагнітні $B_{(k)}^{(i)}$ компоненти гравітаційного поля. Наприклад, в [27] ці компоненти означені як

$$E_{(k)}^{(i)} = R^{(i)(4)}_{(k)(4)}, \quad (8)$$

$$B_{(k)}^{(i)} = -\frac{1}{2} R^{(i)(4)}_{(m)(n)} \varepsilon^{(m)(n)}_{(k)}. \quad (9)$$

Тут для наших цілей обмежимося розглядом лише гравітомагнітних компонент поля для спостерігача, що рухається відносно джерела поля Шварцшильда. Для конкретики орієнтуємо локальні просторові вектори так, щоб перший вектор був ортогональним до площини, яка визначається миттєвим напрямком руху спостерігача та радіальним напрямком стосовно шварцшильдівської маси, а другий вектор спрямуємо вздовж напрямку руху цього спостерігача. Використовуючи стандартні шварцшильдівські координати, згідно із (9) отримуємо вирази для відмінних від нуля гравітомагнітних компонент поля

$$B_{(2)}^{(1)} = B_{(1)}^{(2)} = \frac{3Mu_{\parallel}u_{\perp}}{r^3\sqrt{u_4u^4-1}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \quad (10)$$

$$B_{(3)}^{(1)} = B_{(1)}^{(3)} = \frac{3Mu_{\perp}^2u^4}{r^3\sqrt{u_4u^4-1}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \quad (11)$$

де $u_{\parallel} \equiv dr/ds$ і $u_{\perp} \equiv rd\varphi/ds$ є відповідно радіальною і тангенціальною компонентами 4-швидкості спостерігача, а M – шварцшильдівська маса. Проаналізуємо залежність виразів (11), (12) від швидкості. Зазначимо, що гравітомагнітні компоненти відмінні від нуля лише для $u_{\perp} \neq 0$. Тобто, тут ситуація подібна до тієї, що відома в електродинаміці для компонент магнітного поля рухомого електричного заряду. Однак загалом компоненти (11), (12) відмінні від нуля і суттєво залежать від величини швидкості. Справді, якщо $|u_{\perp}| \ll 1$ і $|u_{\parallel}| \ll 1$, спільний множник $3M/r^3$ у виразах для цих компонент домножується на відповідні величини, малі порівняно

із одиницею. Тоді як за високих швидкостей, якщо $|u_{\perp}| \gg 1$, вказаний множник домножується на величини, значно більші за 1, тобто маємо

$$B_{(2)}^{(1)} = B_{(1)}^{(2)} \sim \frac{3M}{r^3} \gamma, \quad B_{(3)}^{(1)} = B_{(1)}^{(3)} \sim \frac{3M}{r^3} \gamma^2, \quad (12)$$

де γ є релятивістським фактором Лоренца, обчисленим за швидкістю частки відносно шварцшильдівського джерела поля.

У яких фізичних ефектах проявляються гравітомагнітні компоненти? Для відповіді на це запитання повернемося до рівнянь МП, записаних не у їх традиційній формі, а в термінах супутніх тетрад, як це зроблено в [28, 29]. (До речі, ідея зображення рівнянь МП у тетрадній формі виникла як узагальнення запису рівнянь геодезійних ліній в аналогічній формі [30]). Тут подамо одне співвідношення, що впливає з цього зображення в лінійному за спіном наближенні для довільної метрики:

$$a_{(i)} = \frac{s_{(1)}}{m} R_{(i)(4)(2)(3)}, \quad (13)$$

де $a_{(i)}$ є локальними компонентами 3-прискорення частки відносно стану вільного падіння за оцінкою супутнього спостерігача; $s_{(1)}$ – єдина відмінна від нуля компонента спіну частки, тобто тут перший просторовий вектор орієнтовано за напрямком спіну.

У конкретному випадку руху частки в полі Шварцшильда, коли спін частки ортогональний до площини, яка визначається напрямком руху частки та радіальним напрямком, згідно з (9), (13) маємо

$$a_{(i)} = \frac{s_{(1)}}{M} B_{(i)}^{(1)}, \quad (14)$$

де відмінні від нуля компоненти $B_{(i)}^{(1)}$ записано в (10). Звідси випливає, що гравітомагнітні компоненти проявляються у прискоренні частки зі спіном відносно стану вільного падіння. При цьому внаслідок (12) компоненти прискорення (14) залежать від швидкості γ так, що $a_{(2)} \sim \gamma$, $a_{(3)} \sim \gamma^2$. Компонента ж $a_{(1)}$ дорівнює нулеві за будь-якої швидкості. Абсолютна величина 3-прискорення пропорційна до γ^2 .

Отже, згідно з рівняннями МП, з точки зору спостерігача, супутнього до частки зі спіном у полі Шварцшильда, спін-гравітаційна взаємодія за ультрарелятивістських швидкостей набуває значно більших значень, ніж за невисоких швидкостей.

4. ПРО РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ МП ДЛЯ УЛЬТРАРЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЧАСТКИ. АНТАГРАВІТАЦІЯ В ГРАВІТАЦІЇ

З метою вивчення наслідків впливу спін-гравітаційної взаємодії на рух часток важливо розглянути відповідні фізичні ефекти з точки зору спостерігача, нерухомого відносно джерела поля Шварцшильда або Керра. Для цього необхідно отримати й проаналізувати розв'язки рівнянь МП у таких метриках. При цьому як аналітичні, так і числові обчислення проводити зручніше, якщо замість запису цих рівнянь у традиційній формі

(1), (2) використати їхнє зображення із використанням 3-вектора спіну S_i замість тензора $S^{\lambda\mu}$. Таке зображення вперше застосовано в [10], згодом більш повно в [31] та інших наших публікаціях. Три рівняння з набору (1) із просторовими значеннями індексу λ мають вигляд

$$\begin{aligned} m(\dot{u}^m + \Gamma_{\mu\nu}^m u^\mu u^\nu) - 2\frac{d}{ds} \left[|g|^{-1/2} (\dot{u}^\mu + \Gamma_{\pi\rho}^\mu u^\pi u^\rho) (u_4 S_{[n} g_{p]\mu} + g_{4\mu} S_{[p} u_{n]}) \right] \\ - |g|^{-1/2} u^\nu (\dot{u}^\mu + \Gamma_{\pi\rho}^\mu u^\pi u^\rho) (u_4 \Gamma_{i\nu}^m g_{k\mu} + 2u_i \Gamma_{\nu[k}^m g_{4]\mu}) \varepsilon^{ikl} S_l \\ + \frac{1}{2} |g|^{-1/2} u^\pi (u_4 R_{\pi ik}^m + 2u_i R_{\pi k4}^m) \varepsilon^{ikl} S_l = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

де вільні індекси m , n і p утворюють циклічну комбінацію 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2. Аналогічно четверте рівняння набору (1) можна записати як

$$\begin{aligned} m(\dot{u}^4 + \Gamma_{\mu\nu}^4 u^\mu u^\nu) + \frac{d}{ds} \left[|g|^{-1/2} (\dot{u}^\mu + \Gamma_{\pi\rho}^\mu u^\pi u^\rho) g_{\mu k} u_i \varepsilon^{ikl} S_l \right] \\ - |g|^{-1/2} u^\nu (\dot{u}^\mu + \Gamma_{\pi\rho}^\mu u^\pi u^\rho) (u_4 \Gamma_{i\nu}^4 g_{k\mu} + 2u_i \Gamma_{\nu[k}^4 g_{4]\mu}) \varepsilon^{ikl} S_l \\ + \frac{1}{2} |g|^{-1/2} u^\pi (u_4 R_{\pi ik}^4 + 2u_i R_{\pi k4}^4) \varepsilon^{ikl} S_l = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Запис трьох незалежних рівнянь підсистеми (2) у термінах 3-вектора спіну має вигляд

$$\begin{aligned} u_4 \dot{S}_i + 2(\dot{u}_{[4} u_{i]} - u^\pi u_\rho \Gamma_{\pi[4}^\rho u_{i]}) S_k u^k \\ + 2S_n \Gamma_{\pi[4}^n u_{i]} u^\pi = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Зв'язок між компонентами 3-вектора спіну і його 4-тензора визначається співвідношенням

$$S_i = \frac{1}{2u_4} \sqrt{-g} \varepsilon_{ikl} S^{kl}, \quad (18)$$

де ε_{ikl} – просторовий символ Леві-Чівіті.

Розв'язки рівнянь (15)–(17) для метрик Шварцшильда і Керра досліджувались в [21, 31–39]. Оскільки в цих метриках рівняння МП мають інтеграли руху – енергію та момент кількості руху, то в [21, 31, 38] їх використано для зниження порядку диференціювання у рівняннях. (В де-що іншому контексті інтеграли руху рівнянь МП в метриці Шварцшильда розглядались ще в [40]). Для зручності запису рівнянь, зокрема з метою подальшого числового інтегрування, їх записано в термінах знерозмірених величин y_i [21, 37, 38], означених як

$$\begin{aligned} y_1 = \frac{r}{M}, \quad y_2 = \theta, \quad y_3 = \varphi, \quad y_4 = \frac{t}{M}, \\ y_5 = u^1, \quad y_6 = Mu^2, \quad y_7 = Mu^3, \quad y_8 = u^4, \end{aligned}$$

$$y_9 = \frac{S_1}{mM}, \quad y_{10} = \frac{S_2}{mM^2}, \quad y_{11} = \frac{S_3}{mM^2}. \quad (19)$$

Тоді усі рівняння МП набувають вигляду системи 11 рівнянь першого порядку для y_i . Їхній явний вигляд для довільних рухів частки зі спіном у полях Шварцшильда і Керра подано відповідно в [38] і [21]. (Складні аналітичні перетворення проведено за активної участі О. Б. Стефанишина і М. Т. Феника, аспірантів, а згодом співробітників відділу диференціальних рівнянь і теорії функцій ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України; вони ж виконали комп'ютерне інтегрування цих рівнянь). Досліджено різні випадки ультрарелятивістських рухів частки зі спіном у цих полях, які суттєво відрізняються від гнодзійних рухів безспінової частки.

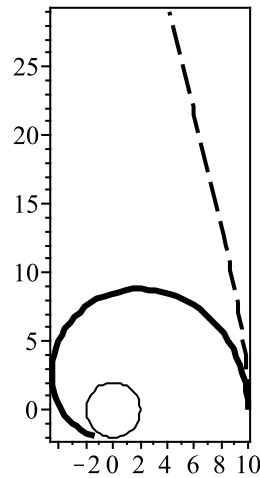


Рис. 1: Траєкторії спінової (суцільна лінія) і безспінової (штрихова лінія) часток у полі Шварцшильда, які стартують з однаковою ультрарелятивістською початковою швидкістю з позиції $r = 5r_g$. Коло радіуса 2 відповідає поверхні горизонту.

Для прикладу, спочатку звернемо увагу на ультрарелятивістські колові орбіти частки зі спіном, що їх допускають рівняння МП в екваторіальній площині поля Шварцшильда. Зазначимо, що згідно із рівняннями геодезійних ліній такі орбіти для безспінової частки існують лише для значень радіальної координати, які задовольняють умову $r = 1,5r_g(1 + \delta)$, де $\delta > 0$, $\delta \ll 1$. Якщо ж ця умова не виконується, то для $r > 1,5r_g$ характерна така властивість: якою б великою не була початкова тангенціальна компонента швидкості безспінової частки, за нульової радіальної компоненти, вона розпочне рухатися в напрямку зростання r , причому для достатньо великих початкових значень r це зростання буде монотонним, тобто така частка буде постійно віддалятися від шварцшильдівського джерела поля. Натомість для частки зі спіном ситуація інша: яким би великим не було r ($r > 1,5r_g$), для нього завжди можна вказати таке достатньо велике значення тангенціальної компоненти швидкості, за

нульового значення радіальної компоненти, що забезпечить такій частці рух по коловій орбіті [38]. Це можливо за рахунок впливу на частку значного притягання (додаткового до звичайного “геодезійного” притягання), зумовленого спі́н-гравітаційною взаємодією, яка у цій ситуації має ознаки спі́н-орбітальної взаємодії. Указану різницю в рухах безспінової і спінової ультрарелятивістських часток ілюструє рис. 1. Підкреслимо, що необхідне значення тангенціальної швидкості має прорядок $1/\sqrt{\varepsilon}$, де ε вказане в (6), і їй відповідає релятивістський γ -фактор Лоренца цього ж порядку, тобто згідно із (6) маємо $\gamma^2 \gg 1$.

Із зміною співвідношення орієнтації спі́ну частки та напрямку її орбітальної швидкості відносно шварцшильдівської маси та за умов ультрарелятивістських рухів, що відповідають значенню γ -фактора Лоренца того ж порядку $1/\sqrt{\varepsilon}$, рівняння МП мають розв’язки, які описують суттєво негеодезійні колові орбіти в екваторіальній площині поля Шварцшильда для значень r , менших від $1,5r_g$ [38]. У цих випадках вплив гравітаційної спі́н-орбітальної взаємодії протидіє звичайному геодезійному притягання. Тобто, дослідження ультрарелятивістської спі́н-гравітаційної взаємодії за її описом рівняннями МП дає можливість виявити нові аспекти гравітаційної взаємодії загалом, які вказують на те, що за певних умов гравітація може проявитись як антигравітація.

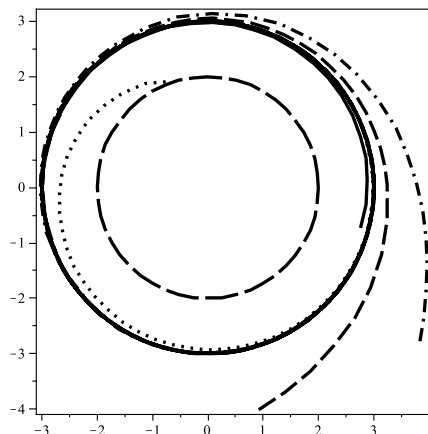


Рис. 2: Траєкторії ультрарелятивістської спінової частки в полі Шварцшильда для кутів нахилу спі́ну до екваторіальної площини 0° (штрих-точкова лінія), 1° (штрихова лінія) і 10° (суцільна лінія) та невеликою початковою радіальною компонентою швидкості порівняно із її тангенціальною компонентою. Точкова лінія відповідає траєкторії безспінової частки з тим самим початковим значенням швидкості. Усі рухи починаються з $r = 1,5r_g$. Коло радіуса 2 відповідає поверхні горизонту.

Результати вивчення суттєво негеодезійних орбіт частки зі спі́ном у полі Керра викладено в [39] з відповідними графіками, які ілюструють область їхнього існування і залежність необхідних величин γ -фактор Лоренца від радіальної координати. Порівняно із шварцшильдівським ви-

падком ситуація урізноманітнюється, зокрема тому, що тут проявляється сумісна дія гравітаційних ультрарелятивістських спін-орбітальної і спін-спінової взаємодій. Також досліджено ультрарелятивістські рухи часток зі спіном у полях Шварцшильда і Керра, які відхиляються від колових орбіт за рахунок неортогональності (нахилу) спіну до екваторіальної площини і через відмінність від нуля початкових значень радіальної компоненти швидкості [38]. Рис. 2 ілюструє окремі випадки для поля Шварцшильда.

5. ЧИСЛОВІ ОЦІНКИ

Звичайно, ми не можемо вказати жодної ситуації, коли б макроскопічне тіло рухалося відносно масивного джерела гравітаційного поля із швидкістю, близькою до швидкості світла, із релятивістським фактором Лоренца значно більшим за 1. Однак для елементарних часток, наприклад зі складу космічних променів, це типово. Чи ж реально мають якісь із цих часток швидкості, настільки близькі до швидкості світла, щоб їхні траєкторії в полі шварцшильдівської чи кєррівської чорної діри значно відхилились від геодезійних траєкторій, як це ілюструють, зокрема, рис. 1 і 2? Відповідь позитивна, оскільки, наприклад, для електрона в гравітаційному полі шварцшильдівської чорної діри з масою близько трьох сонячних мас необхідне значення γ -фактора для реалізації ним вказаних вище ультрарелятивістських колових орбіт неподалік чорної діри має порядок 10^8 . Цей γ -фактор відповідає енергії вільного руху електрона порядку 10^{14} еВ. Аналогічно для протона в полі такої ж чорної діри відповідна енергія становить 10^{18} еВ. Для масивної чорної діри ці величини є більшими, наприклад, якщо M дорівнює 10^6 сонячних мас, відповідне значення енергії для електрона становить 10^{17} еВ і для протона 10^{21} еВ. Далеко від чорної діри усі ці величини є більшими, оскільки необхідне значення γ -фактора пропорційне до \sqrt{r} .

Зазначимо, що для нейтрино поблизу чорної діри з масою трьох сонячних мас необхідне значення γ -фактора для рухів по суттєво негеодезійних колових чи близьких до них орбітах відповідає енергії його вільного руху порядку 10^5 еВ. Якщо ж чорна діра має масу 10^6 сонячних мас, відповідна енергія становить 10^8 еВ.

Чи можна ефекти ультрарелятивістської спін-гравітаційної взаємодії, в принципі, зареєструвати у процесі спостережень, наприклад, над синхротронним випромінюванням від деяких чорних дір? Ймовірно, так, з тим, що є труднощі розпізнавання того, чи таке випромінювання спричинене саме спін-гравітаційною взаємодією, а не впливом на заряджену частку магнітного поля.

6. ДО ВІДПОВІДНОСТІ МІЖ РІВНЯННЯМИ МП І ДІРАКА

Як зазначено вище, у лінійному за спіном наближенні, коли другим доданком у правій частині виразу (5) можна знехтувати порівняно із першим, тобто коли імпульс і швидкість частки практично паралельні між собою, рівняння МП впливають із загальнорелятивістського рівняння Дірака як певне класичне наближення. В [32] також показано, що у конкретному випадку ультрарелятивістської колової орбіти в полі Шварцшильда з $r = 1.5r_g$, яка є спільним розв'язком як точних рівнянь МП, так і їх

лінійного за спіном наближення, існує відповідність з розв'язком загальноковаріантного рівняння Дірака у вигляді хвильового пакету, максимум якого припадає саме на значення радіальної координати $1.5r_g$. Однак така відповідність відсутня для тих ультрарелятивістських колових орбіт у полі Шварцшильда, існування яких зумовлене нелінійними за спіном членами. Це не дивно, якщо взяти до уваги той факт, що при узагальненні звичайного рівняння Дірака на викривлений простір уведено процедуру паралельного перенесення спінів і відповідно коваріантне диференціювання спінів як узагальнення коваріантного диференціювання тензорів. Зазначимо, що таке рівняння було отримане 1929 р., тобто за вісім років до рівнянь МП. При цьому суттєво, що згідно з точними рівняннями МП класичний спіні зазнає не паралельного перенесення, а перенесення Фермі, й між ними нема різниці лише якщо світова лінія частки зі спіном збігається із геодезійною лінією, що загалом не так. Тому, на перший погляд, для виконання принципу відповідності між загальноковаріантним рівнянням Дірака та рівняннями МП достатньо в рівнянні Дірака процедуру паралельного перенесення спінів замінити їхнім перенесенням за правилом Фермі [42]. Однак коректно ввести поняття перенесення спінів неможливо, не порушуючи лоренц-інваріантності рівнянь, на що звернув нашу увагу проф. А. Траутман. Можливо, вихід із ситуації невідповідності між загальноковаріантним рівнянням Дірака, запропонованим в [25], і рівняннями МП справді полягає у визнанні того, при розгляді квантових явищ в області високих енергій необхідно відмовитись від лоренц-інваріантності в такому сенсі, як вона розумілась досі. Тим більше, що до висновків про можливість порушення лоренц-інваріантності у високоенергетичній області за останні роки прийшло багато дослідників. Зокрема, широкого резонансу набув підхід, запропонований в [43]. В усякому разі, рівняння МП можуть бути корисними при побудові адекватних нових теорій як певний орієнтир.

7. ВИСНОВКИ

Отже, важливим наслідком інспірованих В. Я. Скоробогатьком і М. Т. Сеньківим понад 40 років тому досліджень у царині загальної теорії відносності стало виявлення нових властивостей гравітаційної взаємодії, які впливають із рівнянь МП для ультрарелятивістських рухів часток зі спіном. Рівняння МП заслуговують на значно більшу увагу дослідників у царині загальної теорії відносності й альтернативних теорій, ультрарелятивістської астрофізики, космології та квантової теорії. Зокрема, уже при викладі основних передбачень загальної теорії відносності стосовно фізики чорних дір у відповідних монографіях доцільним було б акцентувати увагу на тому, що рухи реальних часток матерії, які беруть участь у процесі гравітаційного колапсу, можна лише наближено описати геодезійними лініями, а для точнішого опису необхідно брати до уваги рівняння МП.

Деякі інші аспекти теорії ультрарелятивістської спіні-гравітаційної взаємодії, які не знайшли відображення у цій статті, висвітлено в [44-58].

Література

- [1] *Parapetrou A.* Proc. R. Soc. A. 1951. **209**. 248.
- [2] *Mathisson M.* Acta Phys. Pol. 1937. **6**. 163.

- [3] *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* Gravitation. – San Francisco: Freeman, 1973.
- [4] *Sauer T., Trautman A.* Acta Phys. Pol. B. Proc. Suppl. 2008. **1**. 7.
- [5] *Mathisson M.* Gen. Relativ. Gravit. 2010. **42**. 1011.
- [6] *Dirac P. A. M.* Nature. 1940. **146**. 613.
- [7] *Corinaldesi E., Papapetrou A.* Proc. R. Soc. A. 1951. **209**. 249.
- [8] *Rasband S.* Phys. Rev. Lett. 1973. **30**. 111.
- [9] *Пляцко Р. М.* Препринт ИФ АН БССР № 159. Минск. 1978.
- [10] *Пляцко Р. М.* Диссерт. канд. физ.-мат. наук. Ин-т физики АН БССР. Минск. 1979.
- [11] *Wald R.* Phys. Rev. D. 1972. **6**. 406.
- [12] *Пляцко Р. М., Винар А. Л.* Докл. АН СССР. 1982. **263**. 1125.
- [13] *Винар Р. М.* Диссерт. канд. физ.-мат. наук. Ин-т физики АН БССР. Минск. 1988.
- [14] *Möller C.* Commun. Dublin Inst. Advan. Studies. Ser A. 1949. **5**. 3.
- [15] *Mashhoon B. J.* Math. Phys. 1971. **12**. 1075.
- [16] *Mathisson M.* Acta Phys. Pol. 1937. **6**. 218.
- [17] *Weysenhoff J., Raabe A.* Acta Phys. Pol. 1947. **9**. 7.
- [18] *Александров А. Н.* Кинем. физ. небес. тел. 1991. **7**. 13.
- [19] *Mashhoon B.* Ann. Phys. 1975. **89**. 254
- [20] *Пляцко Р., Стефанишин О., Феник М.* Фізичний збірник НТШ. 2011. Том 8. 151.
- [21] *Plyatsko R. M., Stefanyshyn O. B., Fenyk M. T.* Class. Quantum Grav. 2011. **28**. 195025.
- [22] *Hojman S. A., Asenjo F. A.* Class. Quantum Grav. 2013. **30**. 025008.
- [23] *Costa L. F., Herdeiro C., Natário J., Zilhão M.* Phys. Rev. D. 2012 **85**, 024001.
- [24] *Wong S.* Int. J. Theor. Phys. 1972. **5**. 221; *Kannenberg L.* Ann. Phys. 1977. **103**. 64; *R. Catenacci R., Martellini M.* Lett. Nuovo Cimento 1977. **20**. 282; *Audretsch J. J.* Phys. A. 1981. **14**. 411; *Gorbatsievich A.* Acta Phys. Pol. B. 1986. **17**. 111; *Barut A., Pavsic M.* Classical Quantum Gravity 1987. **4**. 41; *Cianfrani F., Montani G.* Europhys. Lett. 2008. **84**. 30008; *Int. J. Mod. Phys. A.* 2008. **23**. 1274; *Obukhov Yu, Silenko A., Teryaev O.* 2009. Phys. Rev. D **80**, 064044.

- [25] *Fock V., Ivanenko D.* Z. Phys. 1929. **54**. 798; *Fock V.* Z. Phys. 1929. **57**, 261; *Weyl H.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1929. **15**. 323.
- [26] *Dixon W. G.* Proc. R. Soc. A. 1970. **314**. 499; Gen. Relativ. Gravitation. 1973. **4**. 199; Philos. Trans. R. Soc. A. 1974. **277**. 59; Acta Phys. Pol. B. Proc. Suppl. 2008. **1**. 27.
- [27] *Thorne K., Hartle J.* Phys. Rev. D. 1985 **31**, 1815.
- [28] *Пляцко Р. М.* Дисерт. док. фіз.-мат. наук. ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2003.
- [29] *Plyatsko R.* Phys. Rev. D. 1998 **58**, 084031.
- [30] *Пляцко Р. М., Сеньків М. Т.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. фіз. 1974. **9**. 12
- [31] *Пляцко Р. М.* Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спіно-орбітальної взаємодії. – К.: Наук. думка. 1988.
- [32] *Plyatsko R., Bilaniuk O.* Class. Quantum Grav. 2001. **18**. 5187.
- [33] *Plyatsko R.* Class. Quantum Grav. 2005. **22**. 1545.
- [34] *Пляцко Р., Стефанишин О., Фенюк М.* Фізичний збірник НТШ. 2008. Том 7. 557.
- [35] *Plyatsko R., Stefanyshyn O.* Acta Phys. Pol. 2008. **39**. 23.
- [36] *Plyatsko R.* Acta Phys. Pol. B. Proc. Suppl. 2008. **1**. 173.
- [37] *Plyatsko R., Stefanyshyn O., M. Fenyuk M.* Phys. Rev. D. 2010. **82**. 044015.
- [38] *Plyatsko R., M. Fenyuk M.* Phys. Rev. D. 2012. **85**. 104023.
- [39] *Plyatsko R., M. Fenyuk M.* Phys. Rev. D. 2013. **87**. 044019.
- [40] *Пляцко Р. М., Сеньків М. Т.* Вісник Львів. ун-ту. Сер. фіз. 1976. **11**. 3.
- [41] *Пляцко Р. М.* Журн. фіз. досл. 2001. **5**. 7.
- [42] *Plyatsko R.* arXiv: gr-qc/0601111; arXiv: 1110.2386.
- [43] *Horava P.* Phys. Rev. D. 2009. **79**. 084008.
- [44] *Пляцко Р. М.* Укр. фіз. журн. 1994. **39**. 654.
- [45] *Пляцко Р. М., Пукас С. Я.* Укр. фіз. журн. 1995. **40**. 517.
- [46] *Пляцко Р. М.* Укр. фіз. журн. 1996. **41**. 133.
- [47] *Пляцко Р.* Фізичний збірник НТШ. 1996. Том 2. 297.
- [48] *Пляцко Р. М.* Укр. фіз. журн. 1997. **42**. 778.

- [49] *Plyatsko R.* Condens. Matter Phys. 1998. **1**. 529.
- [50] *Plyatsko R.* J. Phys. Stud. 1999. **3**. 409.
- [51] *Пляцко Р.* Фізичний збірник НТШ. 2001. Том 4. 239.
- [52] *Пляцко Р. М.* Вісник Київ. нац. ун-ту ім Т. Шевченка. Астрономія. 2003. Вип. 39-40. 117.
- [53] *Пляцко Р.* Фізичний збірник НТШ. 2006. Том 6. 215.
- [54] *Пляцко Р.* Фізичний збірник НТШ. 2008. Том 7. 557.
- [55] *Пляцко Р. М., Стефанишин О. Б.* Журн. фіз. досл. 2009. **13**. 3.
- [56] *Пляцко Р. М., Стефанишин О. Б.* Укр. фіз. журн. 2011. **56**. 869.
- [57] *Пляцко Р. М., Феник М. Т.* Журн. фіз. досл. 2011. **15**. 3004.
- [58] *Plyatsko R. M., Fenyk M. T.* Odessa Astron. Publ. 2012. **25**. 138.

GRAVITATION AND SPIN

Roman PLYATSKO

Pidstryhach Institute of Applied Problems in Mechanics and Mathematics,
Ukrainian National Academy of Sciences, 3-b Naukova Str.

History of investigations of the spin-gravity coupling conducted in Lviv is described. The begining of these investigations is directly connected with the work of the scientific seminar on the mathematical problems in general relativity initiated by V. Ya. Skorobohat'ko and M. T. Sen'kiv in 1971. The Mathisson-Papapetrou equations and their physical consequences for highly relativistic spinning particles in the gravitational fields of black holes are in the focus of our consideration. The situation is discussed regarding the correspondence principle for the general relativistic Dirac equations and the Mathisson-Papapetrou equations.