ВАРІЯЦІЙНІ РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РЕЛЯТИВІСЬКОЇ ДЗИҐИ

Роман МАЦЮК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, $3^{б}$, Львів 79060

Редакція отримала статтю 20 листопада 2012 р.

Подаємо виведення рівняння руху третього порядку для вільної релятивіської дзиґи із засади варіяційности в поєднанні з вимогою його самозмінности щодо перетворень Лоренца.

1. Вступ.

Ця праця покликана доповнити попередні дослідження про варіяційність рівнянь руху, що містять третю похідну від координати частки, переведені у статтях [1–3]. Наприкінці попередньої розвідки [2] встановлено, що рівняння

$$\frac{*\,\ddot{\boldsymbol{u}}\wedge\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\wedge\boldsymbol{u}\|^3}-3\,\frac{(\boldsymbol{s}\wedge\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{s}\wedge\dot{\boldsymbol{u}})}{\|\boldsymbol{s}\wedge\boldsymbol{u}\|^5}\;*\dot{\boldsymbol{u}}\wedge\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{s}+\frac{\mu}{\|\boldsymbol{s}\|^3\|\boldsymbol{u}\|^3}\left(\boldsymbol{u}^2\dot{\boldsymbol{u}}-(\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})\;\boldsymbol{u}\right)=0 \tag{1}$$

при постійних μ та $\boldsymbol{s}$ описує рух вільної дзиґи з масою

$$m=\mu\left(1-\frac{(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u})^2}{\boldsymbol{s}^2\boldsymbol{u}^2}\right)^{3/2}, \tag{2}$$

де значком $\boldsymbol{s}$ позначений деякий чотири-вектор неправдивого „спіну“ (*крутня*) цієї дзиґи. Величина

$$\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \tag{3}$$

є першим інтеґралом рівняння (1). У даній розвідці розглядатимемо самозмінні щодо групи рухів варіяційні рівняння у чотиривимірному просторі спеціяльної теорії відносности. Зокрема, покажемо, що рівняння (1) можна отримати з варіяційної засади. Як технічну передумову, розширимо

PACS 2006 numbers 11.15.Kc, 02.40.Ky, 45.20.Jj, 45.50.-j
Стаття подається в авторській редакції

правдоміру варіяційности, описану в розвідці [1] для рівнянь у часовому ві́дмірі, на випадок теорії в одноманітних („однорідних“) співрядних. Докладно розглянемо пов'язання і відповідність між мовою та технічним апаратом дослідження оберненого варіяційного завдання в часовій ві́дмірності та у формалізмі ві́дмірної байдужости.

2. Варіяційність і ві́дмірна байдужість

Рівняння (1) є параметрично-інваріянтним (ще кажуть *ві́дмірно—байдужим*, або *безвідмірним*) щодо зміни параметра (*ві́дміру*) уздовж його інтеґральних стежок. Для запису подібних безвідмірних сутностей, замість так званих *одноманітних співрядних*, — швидкостей u^α, $\dot u^\alpha$, $\ddot u^\alpha$, …, $u^\alpha_{(r)}$, — можна використовувати *співрядні торкання*, — швидкості v^i, v'^i, v''^i,…, $\mathsf{v}^i_{(r)}$, віднесені до змінної $t = x^0$. В третьому порядку перерахунок між змінними відбувається згідно зі взором:

$$\begin{aligned} \mathsf{v}^i &= \frac{1}{\dot t}\, u^i \\ \mathsf{v}'^i &= \frac{1}{(\dot t)^3}\left(\dot t \dot u^i - \ddot t u^i\right) \\ \mathsf{v}''^i &= \frac{1}{(\dot t)^5}\left\{(\dot t)^2 \ddot u^i - 3\,\dot t\,\ddot t\,\dot u^i + \left[3(\ddot t)^2 - \dot t\,\dddot t\,\right] u^i\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Позначимо буквою p^r перехід від змінних u^α, $\dot u^\alpha$, $\ddot u^\alpha$, …, $u^\alpha_{(r)}$ до змінних v^i, v'^i, v''^i,…, $\mathsf{v}^i_{(r)}$.

Нехай у змінних v^i, v'^i, v''^i,…, $\mathsf{v}^i_{(k)}$ задана деяка ляґранжева густина

$$\Lambda = L\left(t; \mathsf{x}^i, \mathsf{v}^i, \mathsf{v}'^i, \mathsf{v}''^i, \ldots, \mathsf{v}^i_{(k)}\right) dt\,, \tag{5}$$

якій відповідає варіяційне рівняння

$$\mathsf{E}_i\left(t; \mathsf{x}^i, \mathsf{v}^i, \mathsf{v}'^i, \mathsf{v}''^i, \ldots, \mathsf{v}^i_{(s)}\right) = 0\,. \tag{6}$$

Нехай, далі, у змінних v^i, v'^i, v''^i,…, $\mathsf{v}^i_{(k)}$ поставлено варіяційне завдання з функцією Ляґранжа

$$\mathcal{L} = \dot t\,\left(L \circ p^k\right). \tag{7}$$

Попереднім дослідженням [4] встановлена така правда:

Річ 1. *Якщо варіяційне рівняння (6) відповідає ляґранжевій густині (5), то варіяційне рівняння*

$$\{\mathcal{E}_\alpha\} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\,u^i\,\mathsf{E}_i \circ p^s \\ \dot t\,\mathsf{E}_i \circ p^s \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

відповідає функції Ляґранжа (7).

Рівняння (8) порядку $s+1$ описує в „однорідному“ вигляді ті ж безвідмірні інтеґральні стежки, керовані варіяційним завданням (7), що й рівняння (6). Функція Ляґранжа $\mathcal{L}$ вочевидь задовольняє так звані умови Цермело, які є критерієм параметричної байдужости відповідного варіяційного завдання. В другому порядку ці умови записуються ось як:

$$u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}\mathcal{L} + 2\dot{u}^\beta \frac{\partial}{\partial \dot{u}^\beta}\mathcal{L} = \mathcal{L}$$
$$u^\beta \frac{\partial}{\partial \dot{u}^\beta}\mathcal{L} = 0.$$

Для пошуку самозмінних варіяційних рівнянь використовуємо два мірила — мірило варіяційности і мірило самозмінности.

3. Критерій варіяційности

Розглядатимемо компоненти варіяційного рівняння (6), як компоненти ось якої диференційної один-форми:

$$\alpha = \mathsf{E}_i d\mathsf{x}^i. \tag{9}$$

Для довільного $s \in \mathbb{N}$ нехай $\Omega_s(Q)$ означає алгебру диференційних форм на многовиді $T^sQ = \{\mathsf{x}^i, \mathsf{v}^i, \mathsf{v}'^i, \mathsf{v}''^i, \dots, \mathsf{v}^i_{(s-1)}\}$. Нагадаємо поняття *упохіднення* в степенованих алгебрах, наділених узагальненими переміжними співвідношеннями, якою і є алгебра $\Omega_s(Q)$. Якийсь собі ділач D зветься упохідненням степеня q, якщо для будь-якої диференційної форми ϖ степеня p і будь-якої иньшої диференційної форми w справджується співвідношення $D(\varpi \wedge w) = D(\varpi) \wedge w + (-1)^{pq}\varpi \wedge D(w)$. Можна розвинути деяке числення в алгебрі $\Omega_s(Q)$ шляхом впровадження ділачів, — зовнішнього диференціяла d і повної (або ж формальної „часової“) похідної D_t, — ось за якими приписами:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathsf{x}^i} d\mathsf{x}^i + \sum_r \frac{\partial f}{\partial \mathsf{v}^i_{(r)}} d\mathsf{v}^i_{(r)}, \quad d_v{}^2 = 0\,;$$

$$D_t f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathsf{v}^i \frac{\partial f}{\partial \mathsf{x}^i} + \sum_r \mathsf{v}^i_{(r+1)} \frac{\partial f}{\partial \mathsf{v}^i_{(r)}}, \quad D_t d = d D_t.$$

Для того, щоб запроваджене вище означення стало повним, необхідно вимагати аби d було упохідненням степеня 1, тоді як D_t щоб було упохідненням степеня 0. Для подальших рахунків ми потребуватимемо ще одного ділача, — упохіднення степеня 0, — що його позначимо ι, і якого означимо за посередництвом дії на функції та один-форми (які разом локально породжують алгебру $\Omega_s(Q)$), таким чином:

$$\iota f = 0, \quad \iota d\mathsf{x}^i = 0, \quad \iota d\mathsf{v}^i = d\mathsf{x}^i, \quad \iota d\mathsf{v}^i_{(r)} = (r+1)\, d\mathsf{v}^i_{(r-1)}.$$

Нехай тепер ділач $\deg$ вимірює степінь диференційної форми. Нове поняття *ляґранжевого диференціялу* δ впроваджується через свою дію на елементи з $\Omega_s(Q)$:

$$\delta = \left(\deg + \sum_r \frac{(-1)^r}{r!} {D_t}^r \iota^r \right) d \, .$$

Оператор δ має властивість $\delta^2 = 0$. Для диференційно-геометричних об'єктів (5) і (9) маємо співвідношення:

$$\alpha = \delta L. \tag{10}$$

Тепер критерій того, що довільна сім'я виразів $\{\mathsf{E}_i\}$ у формулі (9) є лівою частиною варіяційного рівняння для деякого ляґранжіяну, записується наступним чином [5]:

$$\delta\alpha = 0 \, . \tag{11}$$

Правдомірі (11) можна надати координатного виразу [6, 7]:

$$\delta\alpha = \sum_{s=0}^{r} \left(\frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{v}^j_{s-1}} - \sum_{k=s}^{r} (-1)^k \frac{k!}{(k-s)!s!} D_t^{k-s} \frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{v}^i_{k-1}} \right) d\mathsf{v}^j_{s-1} \wedge d\mathsf{x}^i = 0 \, ,$$

звідкіль випливає система диференційних рівнянь з частковими похідними

$$\frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{x}^j} - \frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{x}^i} + \sum_{k=0}^{r} (-1)^k D_t^k \left(\frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{v}^j_{k-1}} - \frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{v}^i_{k-1}} \right) = 0 \, ; \tag{12a}$$

$$\frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{v}^j_{s-1}} - \sum_{k=s}^{r} (-1)^k \frac{k!}{(k-s)!s!} D_t^{k-s} \frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{v}^i_{k-1}} = 0 \, , \qquad 1 \leqslant s \leqslant r \, . \tag{12b}$$

Записана тут система рівнянь є рівнозначною з наступною (яка отримана із системи (12b) поширенням обсягу зміни букви s аж до залучення значення $s = 0$):

$$\frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{v}^j_{s-1}} - \sum_{k=s}^{r} (-1)^k \frac{k!}{(k-s)!s!} D_t^{k-s} \frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{v}^i_{k-1}} = 0 \qquad 0 \leqslant s \leqslant r \, . \tag{13}$$

Доведення. Ускіснення виразу (13) при $s = 0$ дає рівняння (12a).

Навпаки, у рівнянні (12a) відділімо доданок, який відповідає $k = 0$:

$$2 \frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{x}^j} - 2 \frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{x}^i} + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k D_t^k \frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{v}^j_{k-1}} - \sum_{k=1}^{r} (-1)^k D_t^k \frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{v}^i_{k-1}} = 0 \, .$$

Під першим знаком суми замінімо $\dfrac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{v}^j_{k-1}}$ його виразом з рівняння (12b):

$$\sum_{k=1}^{r} (-1)^k D_t^k \frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{v}^j_{k-1}} = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k D_t^k \sum_{s=k}^{r} (-1)^s \frac{s!}{(s-k)!k!} D_t^{s-k} \frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{v}^i_{s-1}} \, .$$

Перемінімо порядок сумування: $\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=k}^{r} = \sum_{\substack{s,k=1\\ s\geqslant k}}^{r} = \sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}$. Підрахуймо суму за k:

$$\sum_{k=1}^{s}(-1)^k\frac{s!}{(s-k)!k!} = \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k} - \binom{s}{0} = 0-1=-1\,.$$

Врешті рівняння (12a) переходить у

$$2\,\frac{\partial \mathsf{E}_i}{\partial \mathsf{x}^j} - 2\,\frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{x}^i} - \sum_{k=1}^{r}(-1)^k D_t^k\frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{v}^i_{k-1}} - \sum_{k=1}^{r}(-1)^k D_t^k\frac{\partial \mathsf{E}_j}{\partial \mathsf{v}^i_{k-1}} = 0\,,$$

яке збігається з подвоєним рівнянням (13) при $s=0$. □

Правдоміра (13) отримувалася ріжними авторами. Щодо огляду письмен з цього приводу відсилаємо до книги [8].

Зосередимося на рівняннях третього порядку. Є очевидним, що вираз, який відповідає лівій частині такого рівняння, має афінний вигляд щодо найстарших похідних. Застосуємо деякі звичні векторні позначки: крапка долі означає згортку рядочка з наступним стовпцем, а часом також позначатиме матричне множення між матрицею і наступним стовпцем. Частково розв'язуючи систему рівнянь (13) і по можливості спрощуючи, можна дійти висновку, що загальний вигляд рівнянь Ойлєра—Пуасона *третього порядку* є ось:

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{v}'' + (\mathbf{v}'.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}})\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{v}' + \mathbf{B}\,.\,\mathbf{v}' + \mathbf{c} \;=\; \mathbf{0}\,, \tag{14}$$

де скісна матриця $\mathbf{A}$, симетрична матриця $\mathbf{B}$ і стовпець $\mathbf{c}$, – усі залежать од t, x^i, v^i та задовольняють ось яку систему диференційних рівнянь з частковими похідними:

$$\begin{gathered}
\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{A}_{jl]} = 0\\
2\,\mathsf{B}_{[ij]} - 3\,\mathbf{D_1}\mathsf{A}_{ij} = 0\\
2\,\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{B}_{j]\,l} - 4\,\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{A}_{j]\,l} + \partial_{\mathsf{x}^l}\mathsf{A}_{ij} + 2\,\mathbf{D_1}\partial_{\mathsf{v}^l}\mathsf{A}_{ij} = 0\\
\partial_{\mathsf{v}(i}\mathsf{c}_{j)} - \mathbf{D_1}\mathsf{B}_{(ij)} = 0\\
2\,\partial_{\mathsf{v}^l}\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{c}_{j]} - 4\,\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{B}_{j]\,l} + \mathbf{D_1}{}^2\,\partial_{\mathsf{v}^l}\mathsf{A}_{ij} + 6\,\mathbf{D_1}\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{A}_{jl]} = 0\\
4\,\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{c}_{j]} - 2\,\mathbf{D_1}\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{c}_{j]} - \mathbf{D_1}{}^3\,\mathsf{A}_{ij} = 0\,.
\end{gathered} \tag{15}$$

Тут диференційний ділач $\mathbf{D_1}$ є обтятим до найнижчого порядку ділачем повної похідної для змінних x^i,

$$\mathbf{D_1} = \partial_t + \mathbf{v}\,.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}}\,.$$

4. Критерій варіяційности в одноманітних співрядних.

Подібним чином виражається правдоміра варіяційности для рівняння третього порядку в одноманітних співрядних. Варіяційне рівняння (8) прибирає конкретнішого вигляду

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\,.\,\boldsymbol{u}'' + (\boldsymbol{u}'.\,\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{u}})\,\boldsymbol{\mathcal{A}}\,.\,\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{\mathcal{B}}\,.\,\boldsymbol{u}' + \mathfrak{c} \;=\; \mathbf{0}\,, \tag{16}$$

де скісна матриця $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, симетрична матриця $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ і стовпець $\mathbb{c}$, — усі залежать від x^α та u^α, а ще й задовольняють таку систему рівнянь з частковими похідними:

$$
\begin{gathered}
\partial_{u[\alpha}\mathcal{A}_{\beta\lambda]} = 0 \\
2\,\mathcal{B}_{[\alpha\beta]} - 3\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}}\mathcal{A}_{\alpha\beta} = 0 \\
2\,\partial_{u[\alpha}\mathcal{B}_{\beta]\,\lambda} - 4\,\partial_{x[\alpha}\mathcal{A}_{\beta]\,\lambda} + \partial_{x\lambda}\mathcal{A}_{\alpha\beta} + 2\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}}\partial_{u\lambda}\mathcal{A}_{\alpha\beta} = 0 \\
\partial_{u(\alpha}\mathcal{C}_{\beta)} - \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}}\mathcal{B}_{(\alpha\beta)} = 0 \\
2\,\partial_{u\lambda}\partial_{u[\alpha}\mathcal{C}_{\beta]} - 4\,\partial_{x[\alpha}\mathcal{B}_{\beta]\,\lambda} + \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}}{}^2\,\partial_{u\lambda}\mathcal{A}_{\alpha\beta} + 6\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}}\partial_{x[\alpha}\mathcal{A}_{\beta\lambda]} = 0 \\
4\,\partial_{x[\alpha}\mathcal{C}_{\beta]} - 2\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}}\partial_{u[\alpha}\mathcal{C}_{\beta]} - \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}}{}^3\,\mathcal{A}_{\alpha\beta} = 0\,.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Тут диференційний ділач $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}}$ є обтятим до найнижчого порядку ділачем повної похідної для змінних x^α,

$$
\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{\partial_x}\,.
$$

Тепер вкажемо, як вирахувати матриці $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ та стовпець $\mathbb{c}$, маючи в розпорядженні матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, разом із стовпцем $\mathbf{c}$.

Лема. *Нехай у рівнянні (16)*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{A}} &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & \mathbb{A} \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{00} & \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{b} & \mathbb{B} \end{pmatrix}, \\
\mathbb{c} &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_0 \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Нехай так само у виразі (8)

$$
\{\mathcal{E}_\alpha\} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathbb{E} \end{pmatrix}.
$$

Тоді виражаємо величини рівняння (16) у величинах рівняння (14):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \frac{1}{\dot{t}^2}\,\mathbf{A}\circ p^0\,, \\
\mathbb{B} &= \frac{1}{\dot{t}}\,\mathbf{B}\circ p^0\,, \\
\mathbb{C} &= \dot{t}\,\mathbf{c}\circ p^0\,,
\end{aligned}
$$

де матриця $\mathcal{B}$ *є симетричною, і, окрім цього,*

$$
\mathbb{A}\,.\,\mathbf{v} + \mathbf{a} = 0\,, \qquad \mathbb{B}\,.\,\mathbf{v} + \mathbf{b} = 0\,, \qquad \mathcal{B}_{00} + \mathbf{b}\,.\,\mathbf{v} = 0\,, \qquad \mathcal{C}_0 + \mathbb{C}\,.\,\mathbf{v} = 0\,;
$$

$$\mathbb{E} = \dot{t}^3 \left[\mathbf{A} \,.\, \mathbf{v}'' + (\mathbf{v}' . \,\partial_{\mathbf{v}})\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{v}' + \frac{1}{\dot{t}}\, \mathbf{B} \,.\, \mathbf{v}' + \frac{1}{\dot{t}^3}\, \mathbf{c} \right] .$$

В укладі (8) виконується умова Вейєрштраса [9]

$$\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \,.$$

Зауваження. Скісні властивості матриць, — матриці $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ в укладі (16) і матриці $\mathbf{A}$ в укладі (14), — накладають гострі обмеження на саме існування варіяційного рівняння третього порядку в нижчих вимірах:

1. Не існує варіяційного рівняння третього порядку в одновимірному просторі (значок α прибирає одного-єдиного значення, $\alpha = 0$);
2. Не існує безвідмірного (себто „параметрично—інваріянтного“) варіяційного рівняння на площині (значок i прибирає одного-єдиного значення, $i = 1$).

5. Евклідівська незмінність

Ґраф інтеґральної доріжки $t \mapsto \mathsf{x}^i(t)$, $i = 1, \dots n$, варіяційного рівняння (6) можна продовжити до перекрою $t \mapsto (t, \mathsf{x}^i(t), \mathsf{v}^i(t), \mathsf{v}'^i(t), \mathsf{v}''^i(t))$ в'язки струменів $J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, інтеґрального щодо векторної диференційної один-форми у змінній t ,

$$\begin{aligned} e &= \alpha \otimes dt \qquad \bigl(\text{гляди (9)}\bigr) \\ &= \mathsf{E}_i d\mathsf{x}^i \otimes dt \,, \end{aligned} \tag{18}$$

заданої на просторі $J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ струменів перекроїв прямокутного добутку $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Поряд з диференційною формою (18) зручно впровадити ще й так званий її *лепажівський еквівалент*, що його чинники не залежать од похідних третього порядку:

$$\epsilon = \mathsf{A}_{ij} d\mathsf{x}^i \otimes d\mathsf{v}'^j + \mathsf{k}_i d\mathsf{x}^i \otimes dt, \tag{19}$$

$$\mathbf{k} = (\mathbf{v}' . \,\partial_{\mathbf{v}})\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{v}' + \mathbf{B} \,.\, \mathbf{v}' + \mathbf{c} \,. \tag{20}$$

Про цю векторно-значну диференційну один-форму, що набирає значень з простору $T^*\mathbb{R}^n$, можна думати, як про деяку інтерпретацію поняття *лепажівської форми*, альтернативну до викладеної в книзі [8]. Оскільки ми зацікавлені в голономних доріжках, як звичайно, вважатимемо векторно-значні диференційні один-форми (19) і (18) рівнозначними в стосунку до модуля торкання на многовиді $J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$,

$$\epsilon - e = \mathsf{A}_{ij} d\mathsf{x}^i \otimes \theta^j_{\mathbf{3}} \,,$$

де векторно-значні один-форми торкання

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{1}} = d\mathbf{x} - \mathbf{v} dt \,, \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{2}} = d\mathbf{v} - \mathbf{v}' dt \,, \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{3}} = d\mathbf{v}' - \mathbf{v}'' dt \tag{21}$$

породжують модуль торкання на многовиді $J^3(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Щоби враз охопити, як справді евклідівський, так і лже-евклідівський випадки, узгоднімо деякі позначки.

Буквою η позначім знак $+$ чи $-$ компоненти g_{00} звичаєвого діагонального метричного тензора. Серединною крапкою позначім операцію скалярного добутку поміж матрицями, які виражають тензори, або ж поміж вервечками, які виражають вектори, — стосовно звичаєвого (лже)евклідівського метричного тензора. Таким чином, скалярний добуток є нічим иньшим, як просто згорткою, до якої залучений метричний тензор. Твірник X (лже)евклідівських перетворень у тривимірному просторі можна параметризувати деякою скісною матрицею $\mathbf{\Omega}$ і деяким вектором $\boldsymbol{\pi}$:

$$\begin{aligned} X &= -(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{x})\,\partial_t + \eta\, t\,\boldsymbol{\pi}\,.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}} + \mathbf{\Omega}\cdot(\mathbf{x}\wedge\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}}) \\ &\quad + \eta\,\boldsymbol{\pi}\,.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}\,.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + \mathbf{\Omega}\cdot(\mathbf{v}\wedge\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}}) \\ &\quad + 2\,(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}'.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'} + (\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v}')\,\mathbf{v}\,.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'} + \mathbf{\Omega}\cdot(\mathbf{v}'\wedge\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'})\,. \end{aligned}$$

Є можливим вкласти поняття симетрії рівняння (14) в загальні рамці науки про незмінність зовнішньої диференційної системи. Система, про яку нам йдеться, породжена векторно-значною пфафівською формою $\boldsymbol{\epsilon}$ з укладу (19) та векторно-значними диференційними формами торкання $\boldsymbol{\theta_1}$ і $\boldsymbol{\theta_2}$ з укладу (21). Нехай $X(\boldsymbol{\epsilon})$ означає похідну Лі від векторно-значної диференційної форми $\boldsymbol{\epsilon}$ уздовж векторного поля X. Умова незмінности полягає в тім, що мали-б існувати деякі такі матриці $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Xi}$, і $\mathbf{\Pi}$, залежні од $\mathbf{v}$ і $\mathbf{v}'$, що

$$X(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{\Phi}\,.\,\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{\Xi}\,.\,(d\mathbf{x}-\mathbf{v}dt) + \mathbf{\Pi}\,.\,(d\mathbf{v}-\mathbf{v}'dt). \tag{22}$$

Також припускатимемо, що $\mathbf{A}$ і $\mathbf{k}$ in (19) не залежать ані від t ані від $\mathbf{x}$.

Річ 2. *В чотиривимірному (лже)евклідівському просторі не існує самозмінних варіяційних рівнянь третього порядку*

Доведення. Умова самозмінности (22) розпадається на окремі тотожності відповідно до прирівнювання чинників при диференціялах $d\mathbf{v}'$, $d\mathbf{v}$, $d\mathbf{x}$, dt:

$$[\boldsymbol{\pi}\,.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}\,.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + \mathbf{\Omega}\cdot(\mathbf{v}\wedge\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}}]\,\mathbf{A} + 2\,(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{A} + \mathbf{A}.\,\mathbf{v}\otimes\boldsymbol{\pi} - \mathbf{A}\,.\,\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi}\,.\,\mathbf{A} \tag{23}$$

$$2\,(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{v}')\otimes\boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\pi}\,.\,\mathbf{v}')\,\mathbf{A} = \mathbf{\Pi} \tag{24}$$

$$-\mathbf{k}\otimes\boldsymbol{\pi} = \mathbf{\Xi} \tag{25}$$

$$X\mathbf{k} = \mathbf{\Phi}\,.\,\mathbf{k} - \mathbf{\Xi}\,.\,\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}\,.\,\mathbf{v}' \tag{26}$$

Скісна матриця обшару 3 завжди є виродженою: якщо позначимо

$$\mathfrak{a} \overset{\text{def}}{=} *\mathbf{A}\,,$$

то матимемо $\mathbf{A}\,.\,\mathfrak{a} = 0$. Згорнімо, коли так, рівняння (23) зі стовпцем $\mathfrak{a}$ і розщепімо за параметрами $\boldsymbol{\pi}$ та $\boldsymbol{\omega} \overset{\text{def}}{=} *\mathbf{\Omega}$:

$$\mathfrak{a}\times(\boldsymbol{\pi}.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}})\,\mathfrak{a} + (\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v})\,\mathfrak{a}\times(\mathbf{v}.\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}})\,\mathfrak{a} - (\boldsymbol{\pi}\cdot\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}\times\mathbf{v} = 0 \tag{27}$$

$$\mathfrak{a}\times[\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v}\,\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}}]\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathfrak{a}) = 0\,. \tag{28}$$

Покладімо в рівнянні (27) $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ і використаймо (28):

$$\mathfrak{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{a}) - [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{v}\, \mathfrak{a}]\mathfrak{a} \times \mathbf{v} = 0\,.$$

Згорнімо зі стовпцем $\boldsymbol{\omega}$:

$$(\mathfrak{a} \times \boldsymbol{\omega})^2 + [\mathfrak{a}\, \mathbf{v}\, \boldsymbol{\omega}]^2 = 0\,. \tag{29}$$

Величина $(\mathfrak{a} \times \boldsymbol{\omega})^2 = \mathfrak{a}^2\boldsymbol{\omega}^2 - (\mathfrak{a} \cdot \boldsymbol{\omega})^2$ є додатною, якщо сиґнатура метрики дорівнює ± 3. В решті випадків, користаючи з того, що $(\mathfrak{a} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, завжди можна вибрати стовпець $\boldsymbol{\omega}$ таким чином, щоб вектор $\mathfrak{a} \times \boldsymbol{\omega}$ не стримів в уявний бік, $(\mathfrak{a} \times \boldsymbol{\omega})^2 \geq 0$. Тому із співвідношення (29) випливає, що $(\mathfrak{a} \times \boldsymbol{\omega})^2 = 0$. З огляду на решту довільности у виборі $\boldsymbol{\omega}$, повинно бути $\mathfrak{a} = 0$. □

6. Варіяційні рівняння третього порядку для вільної дзиґи.

Як видно із Речі 2, спроби збудувати пуанкаре—самозмінне варіяційне рівняння третього порядку в чотиривимірному світі приречені на невдачу. Ми обминаємо цю трудність упровадженням до шуканого рівняння додаткового вектор—параметра $\boldsymbol{s}$, який перетворювався б за виказом дії групи Лоренца. Потрібно, поруч із цим, стежити, аби не порушувалася будова рівняння Ойлєра—Пуасона (14) разом з умовами (15).

Нехай, отже, вираз (20) не містить явної залежности від змінних t і $\mathbf{x}$, а, зате, величини $\mathfrak{a} = *\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ та $\mathbf{c}$ містять залежність ще й від чотири—вектора $\boldsymbol{s} = \left(s^0, \mathbb{s}\right)$. Твірник перетворень Лоренца повинен містити часть, яка діятиме на параметри s^0 та $\mathbb{s}$ ($\eta = 1$):

$$\begin{aligned} X \;\; = \;\; & -(\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbb{s})\, \partial_{s^0} + s^0\, \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbb{s}} + [\boldsymbol{\omega}\, \mathbb{s}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbb{s}}] \\ & -(\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{x})\, \partial_t + t\, \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}} + [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{x}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}}] \\ & + \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{v}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}}] \\ & + 2\, (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v}' \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'} + (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}')\, \mathbf{v} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'} + [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{v}'\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'}]\,. \end{aligned}$$

Умова самозмінности (22) розпадається на окремі тотожності, які утворюються від прирівнювання чинників при диференціялах $d\mathbf{v}'$, $d\mathbf{v}$, $d\mathbf{x}$ та dt:

$$\begin{aligned} & \left(\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbb{s}\, \partial_{s^0} - s^0\, \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbb{s}} - [\boldsymbol{\omega}\, \mathbb{s}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbb{s}}] - \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} - (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} - [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{v}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}}]\right)\, \mathfrak{a} \times d\mathbf{v}' \\ & - 2\, (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathfrak{a} \times d\mathbf{v}' - \mathfrak{a} \times \mathbf{v}\, (\boldsymbol{\pi} \cdot d\mathbf{v}') - \mathfrak{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{v}') = -\, \boldsymbol{\Phi} \,.\, (\mathfrak{a} \times d\mathbf{v}')\,; \end{aligned} \tag{30}$$

$$-\, 2\, \mathfrak{a} \times \mathbf{v}'\, (\boldsymbol{\pi} \cdot d\mathbf{v}) - (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}')\, \mathfrak{a} \times d\mathbf{v} = \boldsymbol{\Pi} \,.\, d\mathbf{v}\,; \tag{31}$$

$$-\mathbf{k}\, (\boldsymbol{\pi} \cdot d\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Xi} \,.\, d\mathbf{x} \tag{32}$$

$$X\mathbf{k} = \boldsymbol{\Phi} \,.\, \mathbf{k} - \boldsymbol{\Xi} \,.\, \mathbf{v} - \boldsymbol{\Pi} \,.\, \mathbf{v}' \tag{33}$$

Оскільки скісна матриця $\mathbf{A}$ є виродженою, рівнянні (30) містить деяке співвідношення, до якого не входить невизначений чинник $\boldsymbol{\Phi}$. Ось, покладімо у рівнянні (30) $d\mathbf{v}' = \mathfrak{a}$. Права часть рівняння щезне, так що отримаємо два співвідношення з параметрами, відповідно, $\boldsymbol{\pi}$ та $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathfrak{a} \times \left[- \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbb{s}\, \partial_{s^0} + s^0\, \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbb{s}} + \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} \right] \mathfrak{a} - (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathfrak{a})\, \mathfrak{a} \times \mathbf{v} = 0\,, \tag{34}$$

$$\mathfrak{a} \times ([\boldsymbol{\omega}\, \mathbb{s}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbb{s}}] + [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{v}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}}])\, \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{a}) = 0\,. \tag{35}$$

В укладі (34) покладемо один раз $\boldsymbol{\pi} = s^0\, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, а за другим разом $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{s}$, та й додамо отримані вирази. Згідно з укладом (35) одержуємо:

$$- s^0\, [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{v}\, \mathbb{s}]\, \mathfrak{a} \times \partial_{s^0} \mathfrak{a} + {s_0}^2 \mathfrak{a} \times [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{v}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbb{s}}]\, \mathfrak{a} - \ s^0\, [\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{v}\, \mathfrak{a}]\, \mathfrak{a} \times \mathbf{v} + \mathfrak{a} \times [\boldsymbol{\omega}\, \mathbb{s}\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}}]\, \mathfrak{a}$$
$$+ [\boldsymbol{\omega}\, \mathbb{s}\, \mathbf{v}]\, \mathfrak{a} \times (\mathbf{v} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}})\, \mathfrak{a} - [\boldsymbol{\omega}\, \mathbb{s}\, \mathfrak{a}]\, \mathfrak{a} \times \mathbf{v} + s^0 \mathfrak{a} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{a}) = 0\,. \tag{36}$$

Запровадьмо позначку

$$\mathfrak{f} = \mathbb{s} - s^0 \mathbf{v}\,.$$

Покладімо в (35) і у (36) $\boldsymbol{\omega} = -\mathfrak{f}$. Помножім (35) на $-s^0$ і збудуймо півсуму з (36):

$$-[\mathfrak{f}\, \mathbf{v}\, \mathfrak{a}]\, \mathfrak{a} \times \mathbf{v} + \mathfrak{a} \times (\mathfrak{f} \times \mathfrak{a}) = 0\,. \tag{37}$$

Тепер помножім (37) скалярно на вектор $\mathfrak{f}$:

$$[\mathfrak{a}\, \mathbf{v}\, \mathfrak{f}]^2 + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{f})^{\mathbf{2}} = 0\,. \tag{38}$$

Якщо $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{f})^{\mathbf{2}} = 0$, при довільних s^0, $\mathbb{s}$, $\mathbf{v}$, то вектор $\mathfrak{f}$ паралельний до вектора $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \mathsf{a}(\mathsf{v}^{\alpha})\, \mathfrak{f}\,. \tag{39}$$

Розв'язка (39) задовольняє рівняння (34, 35).

У тотожність (33) можна підставити неозначені чинники $\boldsymbol{\Xi}$ та Π із (32) та (31):

$$X\mathbf{k} = \boldsymbol{\Phi} \,.\, \mathbf{k} + (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{k} + 3\, (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}')\, \mathfrak{a} \times \mathbf{v}'\,. \tag{40}$$

Позначімо $\mathbf{G} = (g_{ij})$ і запровадьмо матрицю

$$\mathbf{W} = -X\mathbf{A} - 2(\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{A} - (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{v}) \otimes \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\omega} \otimes \mathfrak{a} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathfrak{a})\mathbf{G}\,.$$

Тепер тотожність (30) запишеться у скороченому вигляді:

$$\boldsymbol{\Phi} \times \mathfrak{a} = \mathbf{W}\,, \tag{41}$$

де векторний добуток поміж діадиком $\boldsymbol{\Phi}$ та вектором $\mathfrak{a}$ запроваджується взором

$$(\boldsymbol{\Phi} \times \mathfrak{a}) \,.\, \mathbf{n} = \boldsymbol{\Phi} \,.\, (\mathfrak{a} \times \mathbf{n})$$

при довільному векторі $\mathbf{n}$. Перемноживши (41) справа векторно на $\mathbf{k}$, з поміччю укладу

$$(\boldsymbol{\Phi} \times \mathfrak{a}) \times \mathbf{k} = (\boldsymbol{\Phi} \,.\, \mathbf{k}) \otimes \mathfrak{a} - (\mathfrak{a} \,.\, \mathbf{k})\, \boldsymbol{\Phi}$$

отримаємо, після підставлення (40),

$$\big[X\mathbf{k} - (\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{k} - 3\,(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v}')\,\mathfrak{a}\times\mathbf{v}'\big]\otimes\mathfrak{a} - \mathbf{W}\times\mathbf{k} - (\mathfrak{a}\cdot\mathbf{k})\,\boldsymbol{\Phi} = 0\,. \tag{42}$$

Тотожності (40, 41) алгебрично рівнозначні з тотожністю (42), якщо тільки $\mathfrak{a}$ і $\mathbf{k}$ є такими, що $\mathfrak{a}\cdot\mathbf{k}\neq 0$. Підставмо (39) у (42) і скористаймо з (41). Отримуємо:

$$\big[X\mathbf{k} - (\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{k} - 3\,(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{v}')\,\mathfrak{a}\times\mathbf{v}'\big]\otimes\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}}\,\mathbf{W}\times\mathfrak{a} - \mathbf{W}\times\big(\mathbf{B}\,.\,\mathbf{v}' + \mathbf{c}\big) = (\mathfrak{a}\cdot\mathbf{k})\,\boldsymbol{\Phi}\,. \tag{43}$$

Нижче подані функції задовольняють систему рівнянь з частковими похідними (43) і, водночас, задовольняють також і умови (15)

$$\mathfrak{a} = \big[(1+\mathbf{v}^2)({s_0}^2 + \mathbb{s}^2) - (s^0 + \mathbb{s}\cdot\mathbf{v})^2\big]^{-3/2};$$

$$\mathbf{B} = \mu\,\frac{(1+\mathbf{v}^2)\mathbf{G} - \mathbf{v}\otimes\mathbf{v}}{(1+\mathbf{v}^2)^{3/2}({s_0}^2+\mathbb{s}^2)^{3/2}}\,;$$

$$\mathbf{c} = 0\,.$$

Рівняння Ойлєра—Пуасона прибирає вигляду:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = {} & \frac{\mathbf{v}''\times(\mathbb{s} - s^0\mathbf{v})}{[(1+\mathbf{v}^2)({s_0}^2+\mathbb{s}^2) - (s^0+\mathbb{s}\cdot\mathbf{v})^2]^{3/2}} \\ & - 3\,\frac{({s_0}^2+\mathbb{s}^2)\,\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v} - (s^0+\mathbb{s}\cdot\mathbf{v})\,\mathbb{s}\cdot\mathbf{v}'}{[(1+\mathbf{v}^2)({s_0}^2+\mathbb{s}^2) - (s^0+\mathbb{s}\cdot\mathbf{v})^2]^{5/2}}\,\mathbf{v}'\times(\mathbb{s} - s^0\mathbf{v}) \\ & + \frac{\mu}{(1+\mathbf{v}^2)^{3/2}({s_0}^2+\mathbb{s}^2)^{3/2}}\,\big[(1+\mathbf{v}^2)\mathbf{v}' - (\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}\big] = 0\,. \end{aligned} \tag{44}$$

Послуговуючись взором (16) і Лемою на сторінці 82, отримуємо рівняння (1).

Вираз у лівій часті рівняння (44) є виразом Ойлєра—Пуасона для кожної з ось якої сім'ї функцій Ляґранжа:

$$L_{(i)} = \frac{s_0}{{s_0}^2+\mathbb{s}^2}\cdot\frac{({s_0}^2+{\mathbf{n}_{(i)}}^2)(s_i - s_0\mathrm{v}_i) - s_i(\mathbf{n}_{(i)}\cdot\mathbf{z}_{(i)})}{({s_0}^2+{\mathbf{n}_{(i)}}^2){\mathbf{z}_{(i)}}^2 - (\mathbf{n}_{(i)}\cdot\mathbf{z}_{(i)})^2}\cdot\frac{\big[\mathbf{v}'\,(\mathbb{s} - s_0\mathbf{v})\,\mathbf{e}_{(i)}\big]}{(\mathbb{s} - s_0\mathbf{v})^2 + (\mathbb{s}\times\mathbf{v})^2} - \frac{\mu}{({s_0}^2+\mathbb{s}^2)^{3/2}}\sqrt{1+\mathbf{v}^2}\,,$$

де запроваджено позначки:

$$\mathbf{n}_{(i)} = \mathbb{s} - s_i\mathbf{e}_{(i)}\,, \qquad \mathbf{z}_{(i)} = (\mathbb{s} - s_0\mathbf{v}) - (s_i - s_0\mathrm{v}_i)\mathbf{e}_{(i)}\,,$$

а вектори $\mathbf{e}_{(i)}$ утворюють базу в $\mathbb{E}^3$.

Відповідно до Речі 1, із повищої сім'ї функцій Ляґранжа отримуємо для рівняння (1) ось яку сім'ю функцій Ляґранжа (7):

$$\mathcal{L}_{(\beta)} = \frac{*\,\dot{\boldsymbol{u}}\wedge\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{s}\wedge\boldsymbol{e}_{(\beta)}}{\|\boldsymbol{s}\|^2\|\boldsymbol{s}\wedge\boldsymbol{u}\|}\cdot\frac{\boldsymbol{s}^2 u_\beta + (\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u})\,s_\beta}{(u_\beta\boldsymbol{s} - s_\beta\boldsymbol{u})^2 - (\boldsymbol{s}\wedge\boldsymbol{u})^2} - \frac{\mu}{\|\boldsymbol{s}\|^3}\|\boldsymbol{u}\|\,,$$

де вектори $\boldsymbol{e}_{(\beta)} = \{\boldsymbol{e}_0, \mathbf{e}_{(i)}\}$ утворюють базу в $\mathbb{E}^4$.

ПОКЛИКИ НА ЛІТЕРАТУРУ

[1] *Matsyuk R.* Condenced matter physics. 1998. **1**, No. 3 (15). 453–462.

[2] *Мацюк Р. Я.* Фізичний збірник НТШ. 2006. **6**. 206–214.

[3] *Мацюк Р. Я.* Мат. методы и физ.-мех. поля. 1984. **20**. 16–19.

[4] *Мацюк Р. Я.* Прикладні проблеми механіки і математики. 2009. **7**. 91–104.

[5] *Tulczyjew W. M.* Com. Rend. Acad. Sci. Paris, Ser. A et B. 1975. **280**, N^{o} 19. 1295–1298.

[6] *Lawruk B., Tulczyjew W. M.* J. Diff. Equat. 1977. **24**, No. 27. 211–225.

[7] *Мацюк Р. Я.* Мат. методы и физ.-мех. поля. 1981. **13**. 34–38.

[8] *Kruprová O.* The geometry of ordinary variational equations [Lect. Notes. in Math. **1678**] – Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 254 p.

[9] *Logan J. D.* Invariant variational principles. – New York: Academic Press, 1977. – 172 p.

THIRD ORDER VARIATIONAL EQUATION FOR THE FREE RELATIVISTIC TOP

Roman MATSYUK

Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics
3 b Naukova St., L'viv, Ukraine

I proffer a development of some third order equation of motion for the free relativistic top from the simultaneously imposed assumptions of variationality and Lorentz symmetry.