

## ВЗАЄМОДІЯ СКАЛЯРНИХ ЧАСТИНОК ЧЕРЕЗ ТАХІЙОННЕ ПОЛЕ

*Ірина ЗАГЛАДЬКО, Аскольд ДУВІРЯК*

Інститут фізики конденсованих систем НАН України,  
вул. Свенціцького 1, Львів 79011

Редакція отримала статтю 22 липня 2014 р.

Розглядається взаємодія скалярних частинок через тахійонне поле в рамках частково редукованої теорії поля. Обчислено диференціальний та інтегральний перетини пружного розсіяння двох різних частинок, що взаємодіють через поле-посередник з уявною масою. Отримано рівняння типу Салпітера для зв'язаних станів, а з нього – нерелятивістичний потенціал тахійонної взаємодії. Рівняння Шредингера із цим потенціалом розв'язано варіаційним та чисельним методами. Аналізується умова існування зв'язаних станів.

### 1. Вступ

Концепція *тахійонів* – частинок, що рухаються швидше від світла – відома вже понад півстоліття [1, 2]. Запропоновано кілька можливих описів тахійонів у рамках квантової теорії поля [3–5]. Кожен з таких описів має ті чи інші недоліки або суперечності, як от: невизначеність числа тахійонів, неінваріантність  $i$ /або нестабільність вакууму, неунітарність матриці розсіяння тощо. Все це ставить під сумнів існування у природі вільних квантів тахійонного поля, можливість їх генерації чи детектування – що й узгоджується з експериментами [6]. Залишаються, однак, можливості “прихованого” існування тахійонів – як віртуальних частинок, що “шубою” огортають інші частинки – джерела тахійонного поля [7]. Віртуальні тахійони можуть виявляти себе у взаємодіях між *тардійонами* – частинками, повільнішими від світла. Зокрема, у роботі [8] піки в диференціальному перетині мезон-нуклонного розсіяння тлумачаться у термінах тахійонних резонансів. Завдяки особливостям кінематики надсвітлових частинок в обмінах можуть брати участь як квантові [9], так і класичні [10] тахійони. В обидвох випадках фундаментальним підґрунтям цих частинок природно вважати тахійонне поле. Але проблеми його квантування все ж залишаються.

Щоб уникнути вказаних вище труднощів, ми відмовляємось від ідеї тахійонів як частинок, і розглядаємо лише класичне (неквантоване) тахійонне поле, обмеживши його роль до посередника взаємодії між звичайними (квантованими) полями. Подібну роль у теоретичній фізиці довгий час

відіграла гравітація, яка лише останнім часом набула глибшого квантового втілення завдяки розвитку теорії струн. З іншого боку, існування та необхідність ефективного опису станів з від'ємним квадратом маси в теорії струн [11] привело до появи нелінійних класичних моделей скалярного тахіонного поля [12] та їх застосування у космології [13, 14]. Такі поля не мають стійкого вакууму і не можуть бути вторинно проквантованими, а в околі нестійкого вакууму лінеаризуються до поля Кляйна-Гордона з уявною масою.

У цій роботі дійсне скалярне тахіонне поле – поле з уявною масою  $\mu = i m$  – розглядається як посередник взаємодії між квантованими полями матерії. Для простоти розглядається модель типу Юкави із двома комплексними скалярними полями матерії, коротко описана в розділі 2. Цю модель зручно тлумачити в рамках частково редукованої теорії поля (ЧРТП) [15–17], а саме: ступені вільності тахіонного поля-посередника вилучаються з лагранжіану моделі на класичному рівні, а взаємодія описується у термінах симетричної функції Гріна цього поля, що з'являється в нелокальному члені редукованого лагранжіану. Часова нелокальність лагранжіану ускладнює гамільтонізацію та квантування моделі; їх можна здійснити пертурбативно – так, як це описано в [16].

Ми розглядаємо дві задачі – задачу пружного розсіяння та задачу на зв'язані стани полів матерії, зумовлені тахіонною взаємодією. В розділі 3 знаходяться амплітуди пружного розсіяння двочастинкових систем, обчислюються диференціальний та інтегральний перетини розсіяння та порівнюються з випадком взаємодії через юкавське поле дійсної маси  $\mu$ .

В розділі 4 з допомогою теоретико-польової версії варіаційного методу [18] виводиться рівняння типу Салпітера для зв'язаних станів двочастинкової системи, а з нього – нерелятивістичний потенціал тахіонної взаємодії. Досліджується рівняння Шредингера із цим потенціалом шляхом застосування варіаційного наближення та чисельного інтегрування. Аналізується умова існування зв'язаних станів. Для цього, зокрема, в розділі 5 розглядається допоміжна модельна задача про рівняння Шредингера із потенціалом діраківського гребінця зі змінною мірою зубців.

## 2. Опис моделі. Гамільтоніан та матриця розсіяння

Модель, яку ми розглядаємо, походить від скалярної моделі Юкави [15, 16], що описує динаміку комплексних скалярних полів матерії  $\phi_a(x)$  з масами  $m_a$  (у нашому випадку – двох:  $a = 1, 2$ ) та дійсного скалярного поля  $\chi(x)$  з масою  $\mu$ , що є посередником взаємодії.

Редукція поля  $\chi(x)$  у вихідному лагранжіані моделі Юкави приводить до ефективного лагранжіану:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{a=1}^2 \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= \sum_{a=1}^2 \{ (\partial_\mu \phi_a^*) (\partial^\mu \phi_a) - m_a^2 \phi_a^* \phi_a \} + \frac{1}{2} \int d^4 x' \rho(x) G(x - x') \rho(x') \end{aligned} \quad (2.1)$$

з нелокальним членом взаємодії скалярних струмів  $\rho = - \sum_a g_a \phi_a^* \phi_a$  полів

$\phi_a$  із “зарядами”  $g_a$  через симетричну функцію Гріна  $G(x - x')$  поля-посередника.

Часова нелокальність в лагранжіяні (2.1) ускладнює гамільтонізацію та квантування моделі. В [16] для такого лагранжіяну побудовано гамільтоніан в квадратичному за константами взаємодії (зарядами) наближенні:  $H = H_{\text{free}} + H_{\text{int}}$ , де

$$H_{\text{free}} = \sum_{a=1}^2 \int d^3k k_{a0} \{b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{a}\mathbf{k}} + d_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{a}\mathbf{k}}\} \quad (2.2)$$

є вільнопольовим гамільтоніаном, а

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} = & - \sum_{ab} \frac{g_a g_b}{(4\pi)^3} \int \frac{d^3k d^3q d^3u d^3v}{\sqrt{k_{a0} q_{a0} u_{b0} v_{b0}}} : \left\{ \tilde{G}(u_b - v_b) \times \right. \\ & \times [\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) d_{\mathbf{a}\mathbf{k}} b_{\mathbf{a}\mathbf{q}} d_{\mathbf{b}\mathbf{u}} d_{\mathbf{b}\mathbf{v}}^\dagger + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) d_{\mathbf{a}\mathbf{k}} b_{\mathbf{a}\mathbf{q}} d_{\mathbf{b}\mathbf{u}}^\dagger d_{\mathbf{b}\mathbf{v}} \\ & + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) d_{\mathbf{a}\mathbf{k}} d_{\mathbf{a}\mathbf{q}}^\dagger d_{\mathbf{b}\mathbf{u}} d_{\mathbf{b}\mathbf{v}}^\dagger + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) d_{\mathbf{a}\mathbf{k}} d_{\mathbf{a}\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{u}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{v}} \\ & + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{a}\mathbf{q}} d_{\mathbf{b}\mathbf{u}} d_{\mathbf{b}\mathbf{v}}^\dagger + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{a}\mathbf{q}} b_{\mathbf{b}\mathbf{u}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{v}} \\ & + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{a}\mathbf{q}}^\dagger d_{\mathbf{b}\mathbf{u}} d_{\mathbf{b}\mathbf{v}}^\dagger + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{a}\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{u}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{v}}] \\ & + \tilde{G}(u_b + v_b) [\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) d_{\mathbf{a}\mathbf{k}} b_{\mathbf{a}\mathbf{q}} d_{\mathbf{b}\mathbf{u}} b_{\mathbf{b}\mathbf{v}} + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) d_{\mathbf{a}\mathbf{k}} b_{\mathbf{a}\mathbf{q}} b_{\mathbf{b}\mathbf{u}}^\dagger d_{\mathbf{b}\mathbf{v}}^\dagger \\ & + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) d_{\mathbf{a}\mathbf{k}} d_{\mathbf{a}\mathbf{q}}^\dagger d_{\mathbf{b}\mathbf{u}} b_{\mathbf{b}\mathbf{v}} + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) d_{\mathbf{a}\mathbf{k}} d_{\mathbf{a}\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{u}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{v}}^\dagger \\ & + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{a}\mathbf{q}} d_{\mathbf{b}\mathbf{u}} b_{\mathbf{b}\mathbf{v}} + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{a}\mathbf{q}} b_{\mathbf{b}\mathbf{u}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{v}}^\dagger \\ & \left. + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{a}\mathbf{q}}^\dagger d_{\mathbf{b}\mathbf{u}} b_{\mathbf{b}\mathbf{v}} + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger d_{\mathbf{a}\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{b}\mathbf{u}}^\dagger d_{\mathbf{b}\mathbf{v}}^\dagger] \right\} : \end{aligned} \quad (2.3)$$

описує взаємодію. Тут  $b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger$ ,  $b_{\mathbf{a}\mathbf{k}}$  – оператори народження та знищення частинок  $a$ -го сорту, а  $d_{\mathbf{a}\mathbf{k}}^\dagger$ ,  $d_{\mathbf{a}\mathbf{k}}$  – відповідних античастинок;  $k_a = \{k_{a0}, \mathbf{k}\}$  – 4-імпульс на масовій оболонці з 0-компонентою  $k_{a0} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_a^2}$ ; двокрапки  $: \dots :$  значать нормальне впорядкування;

$$\tilde{G}(k) \equiv \tilde{G}[k^2] = \int d^4x e^{-ikx} G(x) = \frac{\mathcal{P}}{\mu^2 - k^2} \quad (2.4)$$

– фур’є-образ симетричної функції Гріна поля-посередника, де  $\mathcal{P}$  позначає головне значення Коші.

У цьому ж наближенні в [17] побудовано матрицю розсіяння  $S$ . Вираз для  $S - 1$  можна отримати шляхом формальної заміни  $\delta(\mathbf{k} \pm \mathbf{q} \pm \mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \mapsto -2\pi i \delta^{(4)}(k_a \pm q_a \pm u_b \pm v_b)$  і т. д. (із збереженням відповідних знаків перед імпульсами) у виразі (2.3). Тоді амплітуда розсіяння  $M(\mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_m; \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n)$   $n$ -частинкового стану в  $m$ -частинковий визначається із рівності:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_m | S - 1 | \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n \rangle = & \frac{\delta^{(4)}(p'_1 + \dots + p'_m - p_1 - \dots - p_n)}{\sqrt{2p'_{10} \dots 2p'_{m0} 2p_{10} \dots 2p_{n0}}} \times \\ & \times i (2\pi)^4 M(\mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_m; \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n), \end{aligned} \quad (2.5)$$

як і в звичайній теорії поля [19].

### 3. Двочастинкові процеси пружного розсіяння

Серед двочастинкових станів розсіяння досить розглянути три типи: частинки різних сортів, наприклад,  $1+2$ , частинки одного сорту, напр.,  $1+1$ , і частинково-античастинковий стан  $1+\bar{1}$ :

$$|1+2\rangle = b_{1\mathbf{p}_1}^\dagger b_{2\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle, \quad (3.1)$$

$$|1+1\rangle = 2^{-1/2} b_{1\mathbf{p}_1}^\dagger b_{1\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle, \quad (3.2)$$

$$|1+\bar{1}\rangle = b_{1\mathbf{p}_1}^\dagger d_{1\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle, \quad (3.3)$$

де  $|0\rangle$  – вакуум. Інші стани, наприклад  $1+\bar{2}$  чи  $\bar{1}+\bar{1}$ , за фізичними властивостями зводяться до попередніх внаслідок зарядової симетрії системи. Відповідні амплітуди розсіяння станів (3.1)-(3.3), обчислені з допомогою р-ння (2.5), мають вигляд:

$$M_{1+2} = \frac{g_1 g_2}{(2\pi)^6} \tilde{G}[t], \quad (3.4)$$

$$M_{1+1} = \frac{g_1^2}{2(2\pi)^6} \{\tilde{G}[t] + \tilde{G}[u]\}, \quad (3.5)$$

$$M_{1+\bar{1}} = \frac{g_1^2}{(2\pi)^6} \{\tilde{G}[t] + \tilde{G}[s]\}, \quad (3.6)$$

де

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2, \\ t &= (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2, \\ u &= (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2 \end{aligned}$$

– інваріантні змінні Мандельштама [19].

Структура виразів (3.4)-(3.6) аналогічна до амплітуд двочастинкового розсіяння у стандартній КТП, що описуються діаграмами Фейнмана на рис.1: діаграма 1a відповідає внеску  $\tilde{G}[t]$ , діаграма 1b – внеску  $\tilde{G}[u]$ , а діаграма 1c – внеску  $\tilde{G}[s]$  у виразах (3.4)-(3.6). Різниця полягає лише в тому, що у стандартній КТП лініям поля-посередника відповідає причинна функція Гріна цього поля, а в нашому випадку ЧРТП - симетрична.

В системі центра мас (ЦМ), в якій

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}', \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|,$$

для частинок однакової маси  $m_1 = m_2 \equiv m$  змінні Мандельштама набувають виразів:

$$s = (p_{01} + p_{02})^2 = E^2 = 4p_0^2 \geq 4m^2, \quad (3.7)$$

$$t = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta) \leq 0, \quad (3.8)$$

$$u = -2\mathbf{p}^2(1 + \cos \theta) \leq 0, \quad (3.9)$$

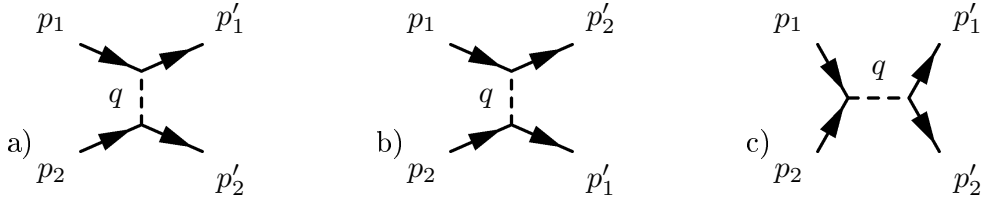


Рис. 1: Фейнманівські діаграми для процесів пружного розсіяння систем двох частинок.

де  $\theta$  є кутом розсіяння, а  $E$  – енергія системи. Тоді, з огляду на аксіальну симетрію, вираз для диференціального перетину розсіяння зручно подати так:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M|^2 \frac{d\sigma'}{E^2} = \frac{-1}{32\pi} |M|^2 \frac{d\cos\theta}{E^2} = \frac{-1}{64\pi} |M|^2 \frac{dt}{\mathbf{p}^2 E^2}, \quad (3.10)$$

де  $d\sigma' = 2\pi \sin\theta d\theta = -2\pi d\cos\theta = -\frac{\pi}{\mathbf{p}^2} dt$  – елемент тілесного кута вихідних імпульсів, а  $t \in [-4\mathbf{p}^2, 0]$  коли  $\theta \in [0, \pi]$ .

Тут ми розглядаємо випадок, коли посередником взаємодії є тахійонне поле, тобто поле Кляйна-Гордона з уявною масою  $\mu = im$ . Величину  $m \equiv |\mu|$ , услід за [1, 2], називатимемо *метамасою*.

Те, що матриця розсіяння містить не причинну функцію Гріна (як у стандартній квантовій теорії поля [19]), а симетричну, є вигіршним для випадку тахійонного поля-посередника, оскільки причинна функція Гріна цього поля не є пуанкаре-інваріантною, тоді як симетрична – так [4]. З вигляду її фур'є-образу

$$\tilde{G}(k) \equiv \tilde{G}[k^2] = \frac{-\mathcal{P}}{m^2 + k^2} \quad (3.11)$$

та нерівностей (3.8)-(3.9) видно, що амплітуди (3.4)-(3.6) і відповідні перетини (3.10) мають полюси:

$$t + m^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta = 1 - \frac{m^2}{2\mathbf{p}^2}, \quad (3.12)$$

$$u + m^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta' = \frac{m^2}{2\mathbf{p}^2} - 1, \quad (3.13)$$

що існують за умови:

$$2|\mathbf{p}| \geq m. \quad (3.14)$$

Відповідні кути розташовані симетрично щодо площини екватора сфери розсіяння; тобто, якщо  $\theta$  задовольняє р-ння (3.12), то  $\theta' = \pi - \theta$  – р-ння (3.13). Їм відповідають поверхні конусів, вздовж яких густина потоку частинок стає нескінченною (т. зв. *саяво*). Для реакцій  $1+2$  і  $1+\bar{1}$  є лише один конус саява (3.12), реакція  $1+1$  дає обидва конуси внаслідок інтерференції вхідних та вихідних частинок.

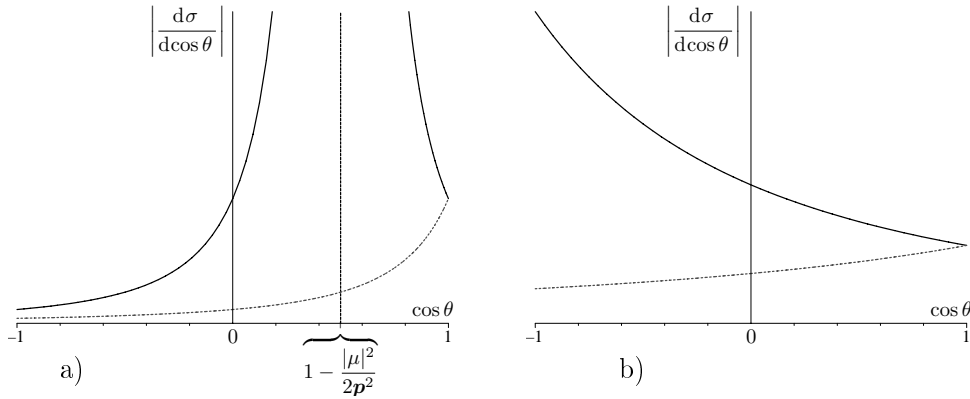


Рис. 2: Диференціальний перетин реакції 1+2 при масивному (пунктир) і тахіонному (суцільна крива) посередниках взаємодії з тим же значенням (мета)маси  $|\mu|$ : а)  $2|\mathbf{p}| > |\mu|$ ; б)  $2|\mathbf{p}| < |\mu|$ .

Для існування конусів саява можна запропонувати евристичне тлумачення. Розглянемо діаграму Фейнмана, напр. 1а, буквально, вважаючи, що усім лініям відповідають вільні частинки з відповідними 4-імпульсами  $p_1, \dots, p'_2, q$  (на своїх масових оболонках), а взаємодія відбувається лише у вершинах, у кожній з яких виконується закон збереження 4-імпульсу. Тоді у системі ЦМ отримуємо:  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ ,  $q_0 = 0$ . Для масивного посередника взаємодії остання рівність неможлива, тому в діаграмі 1а вершини може поєднувати лише віртуальна частинка. Але тахійони є безпороговими частинками, тобто умова:

$$q_0 \equiv \sqrt{\mathbf{q}^2 - m^2} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{q}^2 = m^2 \quad (3.15)$$

можлива і відповідає існуванню т. зв. *трансцендентного* тахійона, що рухається з нескінченною швидкістю [1, 2, 10]. Зауваживши, що умова (3.15) тотожна до (3.12), конус саява (3.12) можна інтерпретувати як внесок вільних тахіонів (або в нашому випадку – вільного поля) в процес розсіяння.

На рис. 2а показано диференціальні перетини реакції 1+2 при звичайному масивному і тахіонному посередниках взаємодії з тим же значенням  $|\mu|$  за умови (3.14). Доречно зауважити, що існування особливості диференціального перетину у вигляді полюсу саява не видається реалістичним, і є наслідком надмірної простоти моделі. Складніші теорії, що враховують взаємодію тахіонів з електромагнетним чи гравітаційним полем [20], або ґрунтуються на теорії струн [12], зумовлюють нестабільність тахіонів. У цьому випадку замість полюсів у перетинах розсіяння повинні були скінченні піки. Тахіонна інтерпретація піків у мезон-нуклонних перетинах була запропонована в [8].

Полюс зникає за умови  $2|\mathbf{p}| < m$ . У цьому випадку диференціальний перетин є скінченим, але в реакціях 1+2 та 1+1 розсіяння назад переважає над розсіянням вперед – на відміну від випадку звичайного посередника; рис. 2б.

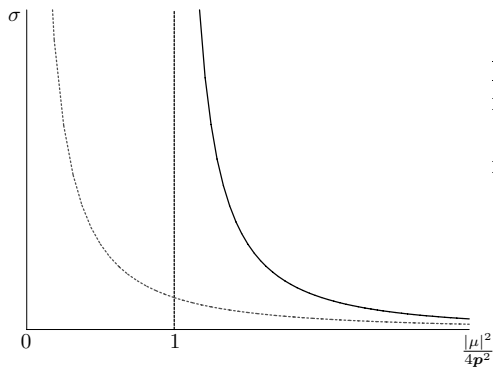


Рис. 3: Повний перетин реакції 1+2 при юкавській (пунктир) і тахіонній (суцільна крива) взаємодіях як функція (мета)маси  $|\mu|$ .

Повний перетин розсіяння:

$$\sigma = \int_{\Omega} d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 E^2} \int_{-4\mathbf{p}^2}^0 |M|^2 dt \quad (3.16)$$

за умови (3.14) є нескінченним – за рахунок полюсу, і збігається у протилежному випадку. Зокрема, для реакції 1+2

$$\sigma = \frac{g_1^2 g_2^2}{2^{20} \pi^{13} \mathbf{p}^2 E^2} \times \begin{cases} (m^2 - 4\mathbf{p}^2)^{-1} - m^{-2}, & 2|\mathbf{p}| < m, \\ \infty, & 2|\mathbf{p}| \geq m; \end{cases} \quad (3.17)$$

див. рис.3. Зауважимо, що і у випадку резерфордівського розсіяння повний перетин є теоретично нескінченним, але практично він обрізається екрануванням віддалених зарядів. Якщо існує тахіонна взаємодія описаного тут виду, то для неї також повинен існувати механізм обрізання. Можливим способом забезпечити скінченний повний перетин розсіяння та уникнути полюсу в диференційному перетині є припущення про велику метамасу тахіонного поля, таку, що практично завжди виконується умова  $2|\mathbf{p}| < m$ .

#### 4. Двочастинкові зв'язані стани

Для дослідження зв'язаних станів двох частинок, пов'язаних тахіонною взаємодією зручно скористатися теоретико-польовою версією варіаційного принципу [18]:

$$\delta \langle \Psi | H - E | \Psi \rangle = 0, \quad (4.1)$$

де гамільтоніян  $H$  подано у р-нях (2.2)-(2.3), а  $|\Psi\rangle$  – відповідно підібраний пробний стан системи. Для системи двох частинок різного сорту, яку ми тут розглядатимемо, пробний стан можна вибрати так:

$$|1+2\rangle = \int d^3 p_1 d^3 p_2 F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) b_{1\mathbf{p}_1}^\dagger b_{2\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle, \quad (4.2)$$

де  $F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  – пробна (каналова) хвильова функція, що у системі ЦМ зводиться до простішої:  $F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f(\mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$  [16, 21, 22]. Тоді для

функції  $f(\mathbf{p})$  варіаційний принцип (4.1) приводить до релятивістичного інтегрального рівняння типу Салпітера:

$$\left[ \sum_{a=1}^2 p_{a0} - E \right] f(\mathbf{p}) = \frac{g_1 g_2}{(4\pi)^3} \int \frac{d^3 p' f(\mathbf{p}')}{\sqrt{p_{10} p_{20} p'_{10} p'_{20}}} \sum_{a=1}^2 \tilde{G}(p_a - p'_a), \quad (4.3)$$

що описує стаціонарні стани двочастинкової системи.

Подібні рівняння можна отримати і для системи  $1+1$ ,  $1+\bar{1}$  та ін., змінивши відповідно пробний стан (4.1) [16, 21–23], але у цій роботі вони не розглядаються.

Повний аналіз рівняння (4.3), що є інтегральним рівнянням із сингулярним ядром, також виходить за рамки роботи. Натомість, ми розглянемо нерелятивістичну границю  $\mathbf{p} \ll m$  рівняння (4.3), що після Фур'є-перетворення у координатне представлення зводиться до рівняння Шредингера (РШ):

$$-\frac{1}{2m_r} \Delta \Psi(\mathbf{r}) + \frac{g_1 g_2}{4m_1 m_2} U(r) \Psi(\mathbf{r}) = \mathcal{E} \Psi(\mathbf{r}); \quad (4.4)$$

тут  $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $\mathcal{E} = E - (m_1 + m_2)$ , а функція  $U(r)$  пов'язана із функцією Гріна поля-посередника:

$$U(r) = - \int dx^0 G(x) = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{G}(k_0=0, \mathbf{k}). \quad (4.5)$$

Для функції Гріна тахійонного поля (3.11) отримуємо потенціал:

$$V(r) = \frac{g_1 g_2}{4m_1 m_2} U(r) = - \frac{g_1 g_2}{m_1 m_2} \frac{\cos m r}{16\pi r} \equiv \alpha \frac{\cos m r}{r}. \quad (4.6)$$

Очевидно, що тахійонний потенціал (4.6) є дійсною частиною потенціалу Юкави з уявною масою  $\mu = i m$  поля-посередника. Можна також взяти *a priori* нерелятивістичний екранований потенціал у плазмі, формально поклавши у ньому радіус Дебая уявним:  $r_D = i/m$ . З фізичного погляду *антиекранований* потенціал може виникати у деякому метастабільному середовищі, такому як діелектрик при від'ємних температурах [24]. Іншим, астрофізичним тлумаченням може бути тяжіння, “одягнене” у темну матерію [25].

Нас цікавить питання: чи здатен потенціал (4.6) утворювати зв'язані стани частинок, і з якими параметрами?

Зазначимо, що вихідна модель (2.1) допускає як додатні, так і від'ємні заряди  $g_a$  полів матерії. Відповідно, від'ємною чи додатною може бути стала зв'язку  $\alpha$  в (4.6). У кожному із випадків потенціал (4.6) є гармонічно модульованим кулонівським потенціалом. Він становить послідовність потенціальних ям і бар'єрів, що переходять одні в одних при зміні знаку  $\alpha$ . Тому при класичному (неквантовому) розгляді зв'язані стани частинок можливі для обидвох знаків  $\alpha$ : вони відповідають рухові частинок в межах тієї чи іншої потенціальної ями. При квантовому розгляді набувають значення глибини ям чи висоти бар'єрів, і можливість тунелювання між



ними, тому відповідь не очевидна. Очікувано, що при малих значеннях метамаси  $m$ , коли потенціал (4.6) близький до кулонівського, зв'язані стани є при  $\alpha < 0$ .

Для дослідження РШ (4.4) здійснюється стандартне розділення на радіальну і кутову частини:  $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\psi(r)Y_\ell^\mu(\hat{r})$ , де  $Y_\ell^\mu(\hat{r})$  – сферична гармоніка. Надалі зручно ввести безрозмірні змінні

$$\rho = r/a_B, \quad \epsilon = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{Ry}, \quad \eta = a_B m, \quad (4.7)$$

$$\text{де } a_B = 1/(m_r|\alpha|), \quad \mathcal{E}_{Ry} = m_r\alpha^2, \quad (4.8)$$

є аналогами борівського радіуса та сталої Рідберга. Тоді рівняння для радіальної хвильової функції  $\psi(r)$  набуває вигляду:

$$\{H^{(\mp)} - \epsilon\}\psi(\rho) = 0, \quad (4.9)$$

$$\text{де } H^{(\mp)} \equiv \frac{1}{2} \left\{ -\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right\} + u^{(\mp)}(\rho), \quad (4.10)$$

$$\text{та } u^{(\mp)}(\rho) = \mp \frac{\cos \eta \rho}{\rho} \equiv \mp \frac{1}{2\rho} \{e^{i\eta\rho} + e^{-i\eta\rho}\}. \quad (4.11)$$

Оператори  $H^{(\mp)}$  та  $u^{(\mp)}(\rho)$  відповідають випадкам  $\alpha = \mp|\alpha|$  які ми називатимемо “притяганням” та “відштовхуванням”. Насправді ці назви є умовними і не відображають реальних властивостей взаємодії.

Зауважимо, що потенціал (4.11) містить суперпозицію потенціалів Юкави, щоправда з уявними показниками в експонентах. Як і для випадку юкавської взаємодії, для обчислення енергії основного стану гамільтоніану (4.10) зручно скористатися варіаційним методом [26].

Згідно із зазначеним вище, потенціал (4.11) на відстанях  $\rho \ll 1/\eta$  близький до кулонівського. Тоді, як пробну, візьмемо шкальовану хвильову функцію

$$\tilde{\psi}_{\ell 0} \equiv \sqrt{k}\psi_{\ell 0}(k\rho), \quad (4.12)$$

де  $\psi_{\ell 0}(\rho)$  описує основний стан ( $n_r = 0$ ) кулонівського радіального гамільтоніану  $H_{\eta=0}^{(-)}$  (4.10)-(4.11). Ця функція є нормованою, має правильну поведінку при  $\rho \rightarrow 0$ , а поведінка при  $\rho \rightarrow \infty$  залежить від значення варіаційного параметру шкалювання  $k$ .

Для обчислення середнього значення енергії:

$$\langle \epsilon \rangle_k = \left\langle -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2\rho^2} + u(\rho) \right\rangle_k \quad (4.13)$$

зручно знайти зв'язок між середніми на шкальованому (4.12) та вихідному (при  $k = 1$ ) станах:

$$\langle f(\rho) \rangle_k \equiv k \int d\rho \psi^2(k\rho) f(\rho) = \int d\rho \psi^2(\rho) f(\rho/k) \equiv \langle f(\rho/k) \rangle, \quad (4.14)$$

і врахувати формули інтегрування поліномів Лагерра [27]:

$$\left\langle -\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right\rangle = \frac{1}{n^2}, \quad \left\langle \frac{1}{\rho} e^{-\xi\rho} \right\rangle = \frac{1}{n^2 (1 + n\xi/2)^{2n}}, \quad (4.15)$$

де  $n = \ell + 1$ . Разом із співвідношеннями (4.11), (4.13) і (4.14) вони дозволяють знайти вираз для середнього значення енергії на варіаційному стані (4.12)

$$\langle \epsilon \rangle_{\varkappa} = \frac{\eta^2}{8\varkappa^2} - \frac{\eta}{4n\varkappa} f(\varkappa), \quad (4.16)$$

$$\text{де } f(\varkappa) = \frac{1}{(1 + i\varkappa)^{2n}} + \frac{1}{(1 - i\varkappa)^{2n}}, \quad (4.17)$$

а замість  $k$  введено новий варіаційний параметр  $\varkappa = n\eta/(2k)$ .

Умова  $\frac{\partial}{\partial \varkappa} \langle \epsilon \rangle_{\varkappa} = 0$  мінімуму енергії (4.16) приводить до рівності:

$$\eta = \frac{\varkappa}{n} \{f(\varkappa) - \varkappa f'(\varkappa)\}, \quad (4.18)$$

яка разом з (4.16) визначає енергію основного стану як функцію  $\eta$ , задану параметрично (у термінах  $\varkappa$ ).

Розглянемо основний s-стан, поклавши  $n = 1$ . З р-нь (4.16)-(4.18) випливає, що  $\langle \epsilon \rangle \leq 0$  якщо  $\varkappa \in [0, \sqrt{2}-1]$ . При цьому енергія  $\langle \epsilon \rangle \in [-\frac{1}{2}, 0]$  монотонно зростає разом з безрозмірною метамасою  $\eta \in [0, 1]$ . Оскільки  $\langle \epsilon \rangle$  мажорує істинне значення енергії, то зв'язаний стан з певністю існує для  $\eta \in [0, 1]$ . Отже, можна оцінити критичне значення  $\eta_c$  метамаси (при якому зникають зв'язані стани) як  $\eta_c \geq 1$ .

На рис. 4а представлено залежність  $\epsilon(\eta)$  разом із результатами чисельного інтегрування рівняння Шредингера (4.9) із гамільтоніаном  $H^{(-)}$  (тобто для випадку "притягання"  $\alpha < 0$ ). Очевидно, що майже в усьому проміжку  $\eta \in [0, 1[$  варіаційне наближення є добрим. Однак для  $\eta \gtrsim 1$  воно стає некоректним. У той же час чисельні результати дають зв'язані стани до значення  $\eta \approx 2.5$ , вище якого енергія зв'язку стає нехтувано малою:  $|\epsilon|_{\eta > 2.5} < 10^{-9}$ , а технічні труднощі чисельного інтегрування швидко зростають. Із рис. 4б очевидно, що залежність  $1/\ln |\epsilon(\eta)|$  виходить на асимптоту, що перетинає вісь абсцис в точці  $\eta \approx 3$ . Вірогідно, що зв'язаних станів немає для  $\eta > \eta_c \approx 3$ . Звичайно, це припущення вимагає строгого математичного обґрунтування. Але з фізичного погляду стани з нехтувано малою енергією зв'язку (навіть якщо вони існують) можна не вважати зв'язаними.

Варіаційне наближення основного стану для випадку "відштовхування"  $\alpha > 0$  також можна отримати з р-нь (4.16)-(4.18), якщо у них формально покласти  $\eta < 0$ , а (безрозмірною) метамасою вважати  $|\eta|$ . У цьому випадку  $\langle \epsilon \rangle \leq 0$  якщо  $\varkappa \in [\sqrt{1+2/\sqrt{3}}, \sqrt{2}+1]$  і, отже,  $\eta \in [0, -1]$ . Це доводить, що і у випадку "відштовхування" існують зв'язані стани. Кількісно ж застосоване варіаційне наближення при  $\alpha > 0$  є поганим, оскільки воно дуже переоцінює енергію основного стану у порівнянні із чисельними результатами. З рис. 5а видно, що зв'язані стани існують при  $0 < |\eta| \leq 2.7$ , та імовірно не існують при  $|\eta| \geq 3$  (подібно до випадку  $\alpha < 0$ ); рис. 5б. Максимум енергії зв'язку  $|\epsilon|_{\max} \approx 0.0764$ , що досягається при  $|\eta| \approx 3/4$ , є майже на порядок меншим, ніж у випадку  $\alpha < 0$ . Однак, здатність тахіонної взаємодії зв'язувати частинки матерії як однакових, так і різних скалярних зарядів  $g_a$  (хоч і з різною інтенсивністю) є цікавою, і робить цю взаємодію дещо подібною до гравітації.

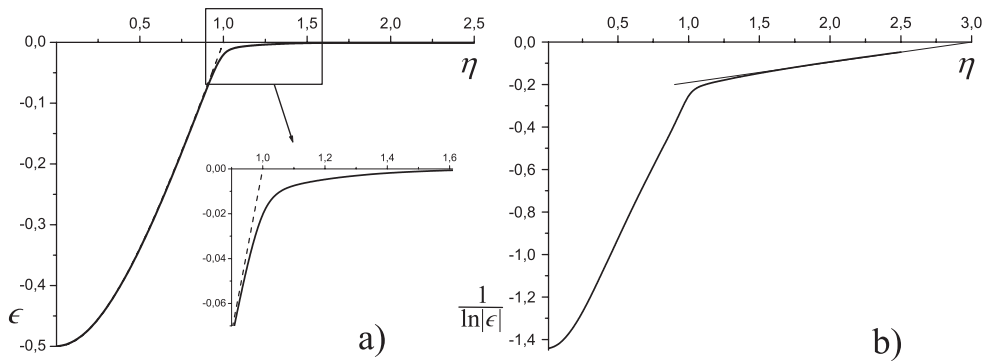


Рис. 4: а) залежність енергії основного стану від метамаси тахійонного посередника взаємодії (у безрозмірних змінних  $\epsilon$ ,  $\eta$ ) для випадку “притягання”  $\alpha < 0$ : суцільна крива – чисельні результати, пунктир – варіаційне наближення; б) асимптотична поведінка енергії при  $1 \lesssim \eta \lesssim 3$ .

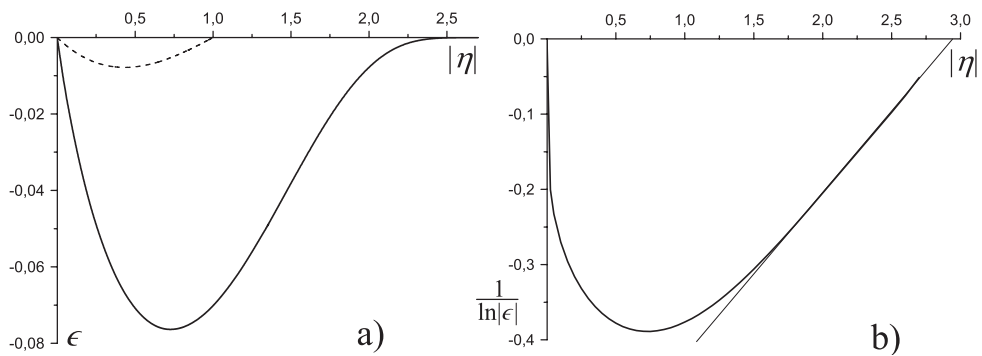


Рис. 5: Те ж, що на рис. 4, але для випадку “відштовхування”  $\alpha > 0$ .

### 5. Модельна задача про зв’язані стани

Чисельні розрахунки, представлені в попередньому розділі, не дають однозначної відповіді на питання – чи існують зв’язані стани при великих значеннях метамаси? Тут ми розглядаємо модельну задачу, в певному сенсі близьку до попередньої, спектр якої можна дослідити аналітично.

Відомо, що зонну структуру спектру кристалу якісно описує аналітично розв’язна модель Пенні-Кроніга, в якій періодичний потенціал кристалу замінено на діраківський гребінець. За аналогією, зіставимо тахійонному потенціалу (4.6), що є амплітудно модульованою косинусоїдою, діраківський гребінець із зубцями змінної висоти. Для цього зручно спочатку звести крок косинусоїди до одиниці, записавши рівняння Шредингера (4.9)-(4.11) для s-станів у вигляді:

$$\psi''(x) + [\epsilon - v(x)]\psi(x) = 0, \quad \text{де } \epsilon = 2\pi^2\epsilon/\eta^2, \quad (5.1)$$

$$v(x) = \kappa \cos(\pi x)/x, \quad x = mr/\pi, \quad \kappa = \mp 2\pi/\eta. \quad (5.2)$$

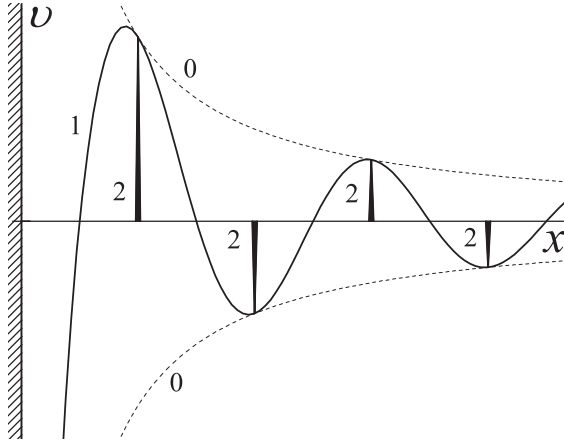


Рис. 6: 0. Кулонівські потенціали. 1. Тахіонний потенціал. 2. Еквівалентний діраківський гребінець.

Тепер замість потенціалу (5.2) розглянемо діраківський гребінець:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \delta(x - n) \quad (5.3)$$

із зубцями змінної висоти  $\beta_n$ , обмежений зліва нескінченно-високою стінкою  $w(x \leq 0) = \infty$ .

Потенціали типу (5.3) (з вибраними певним чином  $\beta_n$ ) використовуються для опису квазіперіодичних взаємодій у модульованих середовищах [28, 29]. Для означення  $\beta_n$  в нашому випадку зіставимо потенціали (5.2) і (5.3) вимогою, щоб площі арок косинусоїди збігалися (тим краще, чим більше  $x$ ) з мірами відповідних  $\delta$ -функцій (рис. 6):

$$\begin{aligned} \int_{n-1/2}^{n+1/2} dx v(x) &= -\kappa \left\{ \text{Ci} \left( (n + \frac{1}{2})\pi \right) - \text{Ci} \left( (n - \frac{1}{2})\pi \right) \right\} \xrightarrow{n \gg 1} \frac{2(-)^n \kappa}{\pi n} \\ &= \int_{n-1/2}^{n+1/2} dx w(x) = \beta_n \equiv \beta \frac{(-)^{n+1}}{n}, \quad \text{де } \beta \equiv \frac{2\kappa}{\pi} = \mp \frac{4}{\eta}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Хвильова функція зв'язаних станів РШ з потенціалом (5.3) є суперпозицією експонент  $e^q$  і  $e^{-q}$  з  $q = \sqrt{-\varepsilon}$ . Її зручно записати так:

$$\psi(x) = A_n \text{sh } q(x - n + 1) - B_n \text{sh } q(x - n), \quad x \in (n - 1, n), \quad (5.5)$$

де сталі  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  визначаються з крайових умов  $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$  та умов зшивання в точках  $x = n$ :

$$A_0 = 0, \quad A_{n+1} = z_n A_n - A_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

$$z_n = 2 \left\{ \text{ch } q + \frac{\beta_n}{q} \text{sh } q \right\}, \quad (5.7)$$

$$B_{n+1} = A_n. \quad (5.8)$$

Система рівнянь (5.6) приводить до секулярного рівняння:

$$K(q, \beta) \equiv z_1 - \frac{1}{z_2 - \frac{1}{z_3 - \dots}} = 0, \quad (5.9)$$

що визначає спектр системи. Р-ння (5.9) має сенс, якщо ланцюговий дріб  $K(q, \beta)$  збігається. Для цього достатньо, щоб для усіх  $n > n_0$  при деякому  $n_0$  виконувалась умова [30]:

$$|z_n z_{n+1}| > 4, \quad (5.10)$$

яка з урахуванням (5.7), (5.4) еквівалентна до:

$$n(n+1) > \frac{\beta^2}{q^2} + \frac{|\beta|}{q} \operatorname{cth} q. \quad (5.11)$$

Очевидно, що для будь-яких  $\beta$  і  $q > 0$  знайдеться таке  $n_0$ , що для  $n > n_0$  умова (5.8) виконується. Хоча авторам не вдалось знайти аналітичний вираз для функції  $K(q, \beta)$ , її можна обчислити з довільною точністю, врахувавши достатню скінченну кількість ланок ланцюгового дроби в (5.9). Для фіксованого  $\beta$  залежність  $K(q, \beta)$  від  $q$  становить послідовність монотонних гілок, розділених точками нескінченного розриву. Кожна з гілок дає один корінь р-ння (5.9), формуючи спектр РШ  $q_0(\beta) > q_1(\beta) > \dots > 0$ . Нас цікавить ф-ція  $q_0(\beta)$ , що визначає енергію основного стану. Надалі покладімо  $\beta > 0$ , оскільки випадок  $\beta < 0$  якісно подібний.

Розглянемо спочатку поведінку спектру, коли  $q \gg 1$ . У цьому випадку, згідно із (5.7),  $z_n \approx 2e^q \left\{ 1 - (-)^n \frac{\beta}{nq} \right\}$  і, отже, р-ння (5.9) можна наближено записати так:

$$K(q, \beta) \approx 2e^q \left\{ 1 + \frac{\beta}{q} \right\} - \frac{1}{2e^q \left\{ 1 - \frac{\beta}{2q} \right\} - \frac{1}{2e^q \{ \dots \} - \dots}} = 0. \quad (5.12)$$

Очевидно, що ця рівність можлива за умови  $q \sim \beta/2$ , що дає асимптотику для ф-ції основного стану  $q_0(\beta)$  при  $\beta \gg 1$  (подібно можна оцінити  $q_{i-1} \sim \frac{1}{2} \beta/i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ). Тоді з (5.1), (5.4) отримуємо:

$$\epsilon = \frac{\eta^2 \epsilon}{2\pi^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{4q}{\pi\beta} \right)^2 \rightarrow -\frac{2}{\pi^2} \approx -\frac{1}{5} \quad \text{при} \quad \eta = \frac{4}{\beta} \rightarrow 0.$$

Розглянемо тепер поведінку спектру, коли  $q \rightarrow 0$ . У цьому випадку збіжність ланцюгового дроби швидко погіршується, так що при  $q = 0$  достатня умова (5.10) не задовольняється. Тому чисельні результати в околі  $q \rightarrow 0$  є ненадійними. З іншого боку, при  $\beta = 0$  ланцюговий дріб в (5.9) стає періодичним, і його легко обчислити:  $K(q, 0) = e^q$ . Отже,  $K(0, 0) = 1$ . Якщо припустити, що в околі  $q \rightarrow 0$  функція  $K(q, \beta)$  є неперервною, то ф-я  $q_0(\beta)$  може прямувати до 0 лише при деякому  $\beta = \beta_0 > 0$ .

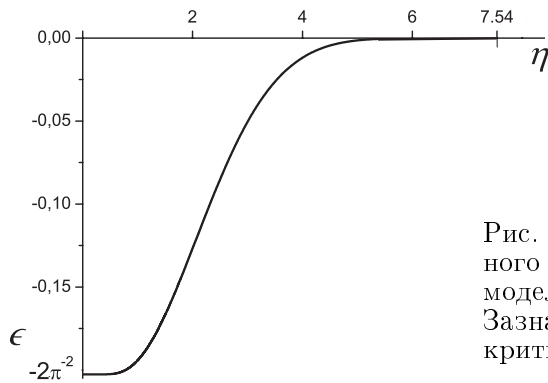


Рис. 7: Залежність енергії основного стану  $\epsilon$  від “метамаси”  $\eta$  модельного потенціалу (5.3)-(5.4). Зазначено мінімальну енергію та критичне значення метамаси.

Чисельні рахунки дають  $\beta_0 \approx 0.53$ , що відповідає значенню метамаси  $\eta = 4/\beta_0 \approx 7.54$ . Хоча воно перевищує вірогідне критичне значення метамаси  $\eta_c \approx 3$  вихідної задачі (4.9)-(4.11), але слугує підтвердженням існування такого граничного значення. Спектр основного стану модельної задачі з потенціалом (5.3), показаний на рис. 7, також якісно подібний на спектр вихідної задачі (див. рис. 4а).

## 6. Висновок

В роботі розглянено частково редуковану модель Юкави, що описує взаємодію комплексних скалярних полів за посередництвом дійсного скалярного поля. Дійсне поле вилучається з лагранжевого опису моделі, і тому не генерує вільних квантів, а проявляється лише як класичний посередник взаємодії. Отримані з моделі амплітуди пружного розсіяння різних двочастинкових систем описуються відповідними діаграмами Фейнмана звичайної КТП (в 2-му наближенні за  $g^2$ ), однак із симетричною функцією Гріна замість причинної. У випадку масивного поля-посередника ця різниця не істотна нижче порогу непружних реакцій. Однак для тахійонного поля симетрична функція Гріна є інваріантною, а причинна – ні. Таким чином, у частково редукованій моделі Юкави природно забезпечується Пуанкаре-інваріантність, а проблеми квантування тахійонного поля не виникають.

При взаємодії через поле уявної маси  $\mu = i m$  диференціальний перетин пружного розсіяння частинок різних сортів, або частинки та античастинки, має особливість (полюс), якщо імпульс частинок (у системі ЦМ) є досить великим:  $2|\mathbf{p}| \geq m$ . Цьому полюсу відповідає поверхня конусу (з відповідним кутом розсіяння), вздовж якої густина потоку частинок нескінченна (т. зв. *слайво*). Повний перетин при цьому розбігається. При розсіянні частинок одного сорту внаслідок інтерференції вхідних та вихідних потоків виникають два симетрично спряжені конуси слайва.

За умови  $2|\mathbf{p}| < m$  полюсу у диференціальному перетині немає, і повний перетин є скінченним. У цьому випадку розсіяння назад переважає над розсіянням вперед, на відміну від випадку із звичайним масивним посередником взаємодії.

До відома авторів, процеси розсіяння з такими незвичайними власти-

востями не спостерігаються в експериментах. Якщо все ж припустити існування тахіонних взаємодій, то неузгодженість теорії та досліду вимагає пояснення. Таку неузгодженість можна тлумачити по-різному.

Один можливий шлях – вважати проміжний стан, що відповідає тахіонним лініям в діаграмах Фейнмана (Рис. 1), нестабільним. Тоді знаменники тахіонного пропагатора (3.11) в амплітудах (3.4)-(3.6), тобто вирази  $t + m^2$ ,  $s + m^2$  і т.д., переходять у брейт-віґнерівські вирази  $t + m^2 - i m \Gamma$  і т.д., а відповідні полюси – у скінченні піки шириною  $\Gamma$ . Подібна тахіонна інтерпретація піків у перетинах мезон-нуклонних реакцій була запропонована у роботі [8], хоча вона не зазнала подальшого розвитку чи глибшого підтвердження.

Інше можливе тлумачення неспостережуваності саява при розсіянні частинок убік – це припущення, що метамаса тахіонного поля сягає кількох ТеВ чи більше. Тоді умова існування полюсу (3.14) не забезпечується на сучасних прискорювачах (хоча й може досягатися у майбутньому).

У задачі про зв'язані стани, обумовлені тахіонною взаємодією, ми обмежились нерелятивістичним розглядом системи двох частинок різних сортів. Взаємодія у такій системі відповідає діаграмі тахіонного обміну (рис. 1a), а інтерференційний (рис. 1b) та анігіляційний (рис. 1c) внески відсутні. Отриманий тут нерелятивістичний потенціал взаємодії (4.6) має вигляд кулонівського, модульованого косинусоїдою із кроком  $2\pi/m$ . Для розв'язання рівняння Шредингера із цим потенціалом були застосовані як варіаційний, так і чисельний методи. Варіаційним методом доведено, що зв'язані стани існують як для від'ємного, так і для додатнього значення константи взаємодії  $\alpha = -\frac{1}{16\pi} \frac{g_1 g_2}{m_1 m_2}$ , у діапазоні метамас  $m = \eta m_r |\alpha|$ , де  $0 < \eta < 1$ . Чисельні розрахунки дають існування зв'язаних станів і при  $1 \leq \eta \leq 2.5$ , причому енергія зв'язку основного стану швидко спадає із зростанням метамаси так, що  $|\mathcal{E}/\mathcal{E}_{Ry}| < 10^{-9}$  при  $\eta = 2.5$ . Труднощі чисельного інтегрування при  $\eta > 2.5$  швидко зростають і не дають надійних результатів, хоча апроксимація залежності  $\mathcal{E}(m)$  в цій області показує подальше стрімке спадання енергії зв'язку аж до нуля при  $m_c \simeq 3m_r |\alpha|$ . Очевидно, що це значення є лише оцінкою, і питання про існування верхньої межі метамаси для утворення зв'язаних станів потребує додаткового обґрунтування.

Для цього ми розглянули модельну задачу типу Пенні-Кроніґа. Тлумачачи тахіонний потенціал як косинусоїду, модульовану кулонівським потенціалом, ми співставили йому таким же ж чином модульований антиперіодичний діраківський гребінець. При розв'язанні задачі на власні значення з таким потенціалом можна уникнути чисельного інтегрування рівняння Шредингера, і звести її до розв'язання секулярного рівняння у термінах ланцюгового дробу. В рамках цієї модельної задачі також отримано аргументи, хоч і не остаточні, на користь існування критичного значення метамаси, при якому зв'язані стани зникають.

Зазначимо, що нерелятивістичний тахіонний потенціал по суті є антиекранованим потенціалом, що описує взаємодію у діелектриках при від'ємних температурах [24] чи тяжіння при врахуванні темної матерії [25]. Тому питання про зв'язані стани та критичний параметр для цього потенціалу має і прикладне значення та заслуговує на подальше вивчення.

**Література**

- [1] O.-M. Bilaniuk, V. K. Deshpande and E. C. G. Subarshan, Amer. J. Phys. 30, 718 (1962).
- [2] O.-M. Bilaniuk, V. K. Deshpande and E. C. G. Subarshan, Physics Today 22, 43 (1969).
- [3] G. Feinberg, Phys. Rev. 159, 1089 (1967).
- [4] K. Kamoi and S. Kamefuchi, Prog. Theor. Phys. 45, 1646 (1971).
- [5] G. V. Efimov. Canonical quantization of the tachyon field. arXiv:1202.2757 (2012).
- [6] E. Recami. J. Phys.: Conf. Ser. 196, 012020 (2009).
- [7] E. C. G. Sudarshan. Phys. Rev. D 1, 2428 (1970).
- [8] A. M. Gleeson, M. G. Gundzik, E. C. G. Sudarshan, and A. Pagnamenta. Phys. Rev. D 6, 807 (1972).
- [9] Ch. Jue. Phys. Rev. D 8, 1757 (1973).
- [10] G. D. Maccarrone and E. Recami. Nuovo Cim. A 57, 85 (1980).
- [11] A. B. Маршаков. УФН 172, 977 (2002).
- [12] A. Sen. Internat. J. Theor. Phys. 20, 5513 (2005).
- [13] A. Frolov, L. Kofman, and A. Starobinsky. Phys. Lett. B 545, 8 (2002).
- [14] O. Sergijenko and B. Novosyadlyj. Phys. Rev. D 80, 083007 (2009).
- [15] M. Barham and J. W. Darewych. Journal of Physic A 31, 3481 (1998).
- [16] A. Duviryak and J. W. Darewych. Journal of Physic A 37, 8365 (2004).
- [17] I. Zagladko and A. Duviryak. Journal of Physical Studies 16, 3101 (2012).
- [18] J. W. Darewych. Ukr. Phys. J. 41, 41 (1996).
- [19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Релятивистская квантовая теория*. Ч. 1 (Москва: Наука, Гл. ред. ф.-м. лит., 1968).
- [20] E. Recami and R. Mignani. Riv. Nuovo Cim. 4, 209 (1974).
- [21] J. Darewych. Condens. Matter Phys. 3, 633 (2000).
- [22] B. Ding and J. Darewych. J. Phys. G 26, 907 (2000).
- [23] M. Emami-Razavi and J. W. Darewych. J. Phys. G 31, 1095 (2005).
- [24] J.-Q. Shen, Phys. Scripta 68, 87 (2003).



- [25] T. Chiueh and Y.-H. Tseng, *Astrophys. J.* 544, 204 (2000).
- [26] S. Flügge. *Practical quantum mechanics I.* (Berlin-Heidelberg-NY, Springer-Verlag, 1971).
- [27] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Квантовая механика (нерелятивистская теория).* (Москва, Физматлит, 2004).
- [28] J. Bellissard, A. Formoso, R. Lima, and D. Testard. *Phys. Rev. B* 26, 3024 (1982).
- [29] J. B. Sokoloff and J. V. Josë. *Phys. Rev. Lett.* 49, 334 (1982).
- [30] W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued Fractions. Analytic Theory and Applications.* (Addison-Wesley, London 1980).

## AN INTERACTION OF SCALAR PARTICLES VIA TACHYON FIELD

*Iryna ZAHLADKO, Askold DUVIRYAK*

Institute for Condensed Matter Physics,  
National Academy of Sciences of Ukraine  
1 Svientsitskii St., 79011 Lviv

Interaction of scalar particles via tachyon field is considered within the partially reduced field theory. The differential and integral cross-sections of elastic scattering of two different particles interacting via mediating field of imaginary mass are calculated. A Salpeter-type equation for bound states and then the non-relativistic potential of tachyon interaction has been derived. The Schrödinger equation with this potential is solved by means of variational and numerical methods. The condition for existence of bound states is analyzed.