УДК. 514.18 **О. В. Воронцов**, к.т.н.

ВИЗНАЧЕННЯ РЕКУРЕНТНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ЧЛЕНАМИ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВЗЯТИМИ ІЗ НЕРІВНОМІРНИМ КРОКОМ

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, Україна

В роботі проведено дослідження визначення поліномів різних степенів за допомоги вивчених властивостей переходу від замкненої до рекурентної форми задання числових послідовностей довільними дискретними значеннями.

Постановка проблеми. Методики дискретного формування геометричних об'єктів повинні забезпечувати необхідну точність побудови моделі геометричного образу, адекватність проблеми тому процесу чи явищу, що моделюється, мінімальні витрати обчислювальних ресурсів на отримання результату, можливість оперативного коректування локальних ділянок проектованого образу. Ефективність методик дискретного формування геометричних образів (будь-яких інженерних об'єктів, процесів чи явищ) передбачає використання ефективних алгоритмів переходу від неперервної форми представлення геометричних образів до їх дискретних аналогів.

Аналіз останніх досліджень. Питанням аналізу рекурентних формул числових послідовностей для дискретного моделювання і формування дискретних образів за даними умовами присвячено докторську дисертацію проф. С.І. Пустюльги [1] , роботи проф. С.М. Ковальова [2, 3], а також ряд інших робіт. Результати одержані у цих дослідженнях показали нові можливості дискретного геометричного моделювання, а саме, можливість простого переходу від дискретно представленого образу до його неперервного аналогу і навпаки. У статтях [4, 5, 6] авторів даної роботи проведено дослідження властивостей та узагальнення переходу від неперервних залежностей до рекурентних формул задання дискретних числових послідовностей шляхом заміни неперервних параметрів дискретними класів елементарних функціональних залежностей, зворотних до них а також тих, які одержують із даних функцій за допомоги чотирьох арифметичних дій і суперпозицій, застосованих певну кількість разів. Доведено, що у загальному випадку, дискретними аналогами елементарних функціональних залежностей будуть вирази скінчених різниць різних порядків із застосованими до них відповідними арифметичними діями.

Постановка завдання. Мета даної роботи полягає у вивченні властивостей переходу від аналітичних виразів поліномів різних степенів до рекурентних формул задання дискретних числових послідовностей шляхом заміни неперервних параметрів дискретними із довільним кроком.

Виклад основного змісту дослідження. Числова послідовність, довільний член якої визначається формулою у замкненій формі

$$a_i = m_0 + m_1 i + m_2 i^2 + m_3 i^3 + ... + m_n i^n$$

визначає поліном n-го степеня

$$y = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + ... + m_n x^n$$

При $n=1$ послідовність має вигляд :

$$a_i = m_0 + m_1 i$$

Таку послідовність, у свою чергу, визначає рекурентна залежність

$$a_{i+1} = a_i + m_1 \ ,$$

що є дискретним аналогом полінома першого степеня.

Рекурентна залежність між ***послідовними*** членами послідовності другого порядку взятими ***із рівномірним кроком*** має вигляд:

$$a_{i-1} - 2a_i = a_{i+1} = 2m_2$$

І т. д. – до n-го порядку [5] .

Визначимо рекурентну залежність між ***непослідовними*** членами числової послідовності взятими ***із нерівномірним кроком.***

Для послідовності першого порядку (рис. 1)

$$a_i = m_0 + m_1 i$$

$$a_{i+p} = m_0 + m_1 (i+p)$$

$$a_{i+p_1} = m_0 + m_1 (i+p_1)$$

$$a_{i+p_2} = m_0 + m_1 (i+p_2)$$

$$a_{i+p} = б_1 a_{i+p_1} + б_2 a_{i+p_2} = б_1 (m_0 + m_1 (i+p_1)) + б_2 (m_0 + m_1 (i+p_2))$$

$$\begin{cases} б_1 + б_2 = 1 \\ б_1 (m_0 + m_1 p_1) + б_2 (m_0 + m_1 p_2) = m_0 + m_1 p \end{cases}$$

$$б_1 = \frac{Д_{б_1}}{Д}; \qquad б_2 = \frac{Д_{б_2}}{Д}$$

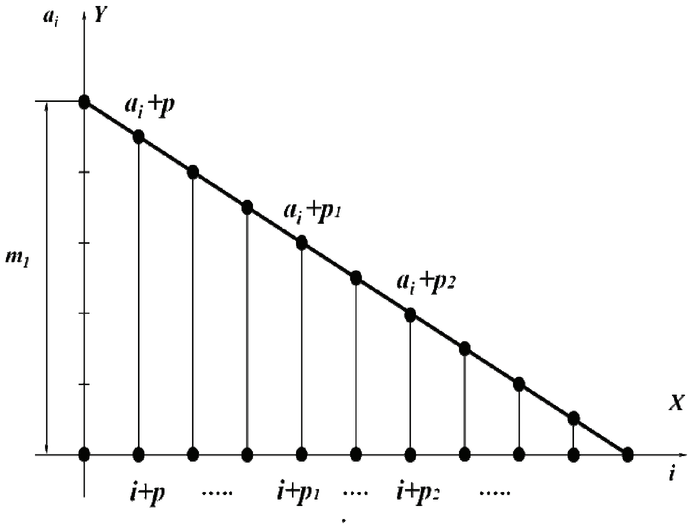

Рис. 1.

$$б_1 = \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1}; \qquad б_2 = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}$$

$$a_{i+p} = \frac{p - p_2}{p_2 - p_1} a_{i+p_1} + \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} a_{i+p_2}$$

$$a_{i+p} = б_1 a_{i+p_1} б_2 + a_{i+p_2}$$

Для послідовності третього порядку (рис. 2)

$$a_i = m_0 + m_1 i + m_2 i^2 + m_3 i^3$$

рекурентна залежність має вигляд:

$$a_{i+p} = б_1 a_{i+p_1} + б_2 a_{i+p_2} + б_3 a_{i+p_3} + б_4 a_{i+p_4},$$

де:

$$б_1 = \frac{Д_{б_1}}{Д}; \qquad б_2 = \frac{Д_{б_2}}{Д}; \qquad б_3 = \frac{Д_{б_3}}{Д}; \qquad б_4 = \frac{Д_{б_4}}{Д};$$

$$\begin{cases} \text{б}_1\sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_1^t+\text{б}_2\sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_2^t+\text{б}_3\sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_3^t+\text{б}_4\sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_4^t=\sum\limits_{t=0}^{3}m_tp^t \\ \text{б}_1\sum\limits_{t=0}^{3}tm_tp_1^{t-1}+\text{б}_2\sum\limits_{t=0}^{3}tm_tp_2^{t-1}+\text{б}_3\sum\limits_{t=0}^{3}tm_tp_3^{t-1}+\text{б}_4\sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_4^{t-1}=\sum\limits_{t=0}^{3}tm_tp^{t-1} \\ \text{б}_1\sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp_1^{t-2}+\text{б}_2\sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp_2^{t-2}+\text{б}_3\sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp_3^{t-2}+\text{б}_4\sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp_4^{t-2}=\sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp^{t-2} \\ \text{б}_1+\text{б}_2+\text{б}_3+\text{б}_4=1 \end{cases}$$

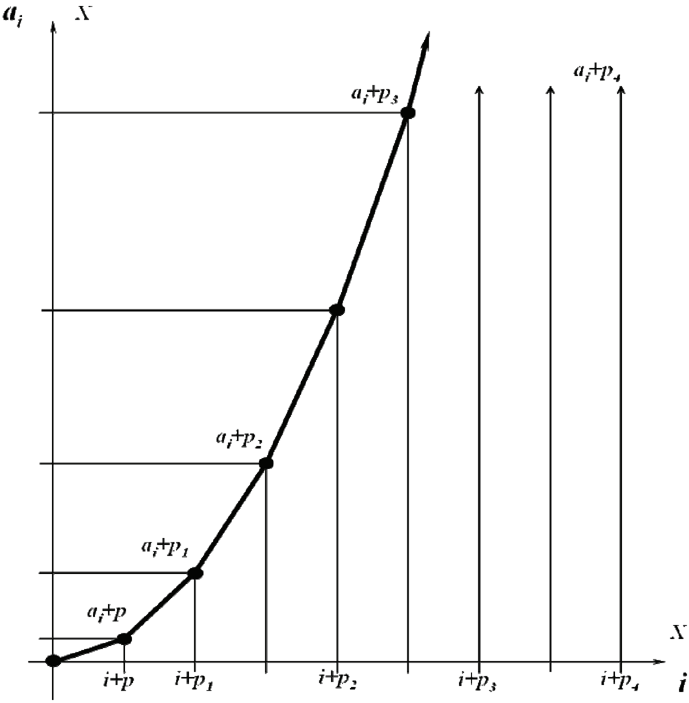

Рис. 2.

$$\text{Д}=\begin{vmatrix} \sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_1^t & \sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_2^t & \sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_3^t & \sum\limits_{t=0}^{3}m_tp_4^t \\ \sum\limits_{t=0}^{3}tm_tp_1^{t-1} & \sum\limits_{t=0}^{3}tm_tp_2^{t-1} & \sum\limits_{t=0}^{3}tm_tp_3^{t-1} & \sum\limits_{t=0}^{3}tm_tp_4^{t-1} \\ \sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp_1^{t-2} & \sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp_2^{t-2} & \sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp_3^{t-2} & \sum\limits_{t=0}^{3}\frac{t(t-1)}{2}m_tp_4^{t-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Д_{б_1}=\begin{vmatrix} \sum_{t=0}^{3} m_t p^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_2^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_3^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_4^t \\ \sum_{t=0}^{3} t m_t p^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_2^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_3^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_4^{t-1} \\ \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_2^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_3^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_4^{t-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Д_{б_2}=\begin{vmatrix} \sum_{t=0}^{3} m_t p_1^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_3^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_4^t \\ \sum_{t=0}^{3} t m_t p_1^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_3^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_4^{t-1} \\ \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_1^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_3^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_4^{t-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Д_{б_3}=\begin{vmatrix} \sum_{t=0}^{3} m_t p_1^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_2^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_4^t \\ \sum_{t=0}^{3} t m_t p_1^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_2^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_4^{t-1} \\ \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_1^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_2^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_4^{t-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Д_{б_4}=\begin{vmatrix} \sum_{t=0}^{3} m_t p_1^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_2^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p_3^t & \sum_{t=0}^{3} m_t p^t \\ \sum_{t=0}^{3} t m_t p_1^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_2^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p_3^{t-1} & \sum_{t=0}^{3} t m_t p^{t-1} \\ \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_1^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_2^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p_3^{t-2} & \sum_{t=0}^{3} \frac{t(t-1)}{2} m_t p^{t-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Для послідовності n-го порядку:

$$a_i = m_0 + m_1 i + m_2 i^2 + m_3 i^3 + \ldots + m_n i^n$$

рекурентна залежність матиме вигляд:

$$a_{i+p} = б_1 a_{i+p_1} + б_2 a_{i+p_2} + б_3 a_{i+p_3} + \ldots + б_k a_{i+p_k} + \ldots +$$
$$+ б_n a_{i+p_n} + б_{n+1} a_{i+p_{n+1}},$$

показники якої визначаються аналогічно.

Література

1. *Пустюльга С.І.* Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями. Дис. д-ра техн. Наук: 05.01.01 / КНУБА. – К.: 2006.

2. *Ковальов С.М., Ботвіновська С.І.* Рекурентні формули числових послідовностей у формуванні дискретно визначених геометричних образів. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С. 30-37.

3. *Ковалев С.Н., Вязанкин В.А.* Прикладная геометрия и геометрическая статика // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 78. – С. 41-43.

4. *Воронцов, О.В., Радченко, Г.О.* Рекурентні аналоги класів елементарних функцій / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 83. – С. 136-139.

5. *Воронцов, О.В., Радченко, Г.О.* Дослідження рекурентних форм представлення елементарних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 98-101.

6. *Воронцов О.В.* Заміна неперервних форм елементарних функціональних залежностей рекурентними формулами задання дискретних числових послідовностей / О.В. Воронцов // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наук. праць — Харків: ХДУХТ, 2010. — Вип. 27. — С. 57—62.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕКУРРЕНТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЧЛЕНАМИ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЗЯТЫМИ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ШАГОМ

О. В. Воронцов

В работе проведено исследование определения полиномов разных степеней при помощи изученных свойств перехода от замкнутой к рекуррентной форме задания числовых последовательностей произвольными дискретными значениями.

DETERMINATION OF RECURRENT DEPENDENCE BETWEEN MEMBERS OF NUMERICAL SEQUENCES WITH NON_UNIFORM STEP

O. Vorontsov

This paper attacks the problem of determination of different degrees polynomial by means passage from closed to the recurrent form of numerical sequences representation by arbitrary discrete values.