УДК 514.18, 515.5 **В. С. Єремєєв**, д.т.н.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Педагогічний Державний університет ім. Б.Хмельницького, Україна

Розглянуто можливість визначення невідомих параметрів рівняння поверхні у випадку нечіткого завдання точок для цієї поверхні у багатовимірному просторі. Запропонований алгоритм побудови відповідної геометричної моделі з використанням теорії планування експериментів.

Постановка проблеми. Задачі інтерполяції і апроксимації знайшли широке використання в наукових дослідженнях [1], [2]. Зокрема, знаходження рівняння поверхні, яка задовольняє заданим умовам, є однією з актуальних проблем в теорії геометричного моделювання [3], [4]. Розглянемо в n+1 – мірному декартовому просторі рівняння поверхні невідомого виду $Y(a_0, a_1,... a_k, x_1, x_2,...x_n)$ від змінних $(x_1, x_2,...x_n)$ з k+1 невідомими числовими параметрами $a_0, a_1,... a_k$. В подальшому це рівняння будемо називати оригіналом. Припустимо, що для m точок з координатами $x_{1i},$, $x_{2i},... x_{ni}$, де i=1,2…m, відомі приблизні значення оригіналу. Позначимо відповідні величини через Y_i:

$$Y_i \approx Y_i(a_0, a_1,... a_k, x_{1i}, x_{2i},... x_{ni}),\ i=1,2…m. \qquad (1)$$

Потрібно побудувати геометричну модель поверхні оригіналу того ж вигляду $Y(a^*_0, a^*_1,...a^*_k, x_1, x_2,...x_n)$ з параметрами a^*_i, в загальному випадку відмінними від a_i. В силу нечіткості завдання точок, на які «натягається поверхня», така постановка передбачає можливість розбіжності точок оригіналу та її моделі. В якості критерію малості подібної розбіжності оберемо суму квадратів відхилень знайденої функції в заданих точках від наближеного значення в цих точках:

$$V=\sum(Y(a^*_0, a^*_1,...a^*_k, x_1, x_2,..x_n) - Y_i)^2, \qquad (2)$$

де підсумовування відбувається за всіма індексами i = 1, 2, ... m.

Рішення зводиться до розглядання зворотної задачі. Отримуване рішення, якщо воно існує, має просте геометричне трактування: в n+1 – мірному просторі знайдено рівняння геометричної моделі поверхні, яка в точках з координатами $(x_{1i}, x_{2i},... x_{ni})$, де i = 1, 2, .. m, співпадає з оригіналом $Y(a_0, a_1,...a_k, x_1, x_2,...x_n)$, з точністю, яка задається виразом (1).

Аналіз останніх досліджень. Геометричні моделі поверхонь в більшості випадків прив‘язуються чітко заданим вимогам [3], [4]. В останній час з‘явилися публікації, де геометричні об‘єкти будуються в умовах деякої невизначеності [5]. Аналіз задач, коли потрібно визначити невідомі параметри в рівнянні для поверхні заданого виду, для якого наближено відомі координати її точок, відрізняється новизною і має практичне значення в багатьох галузях науки й техніки. Перерахуємо деякі з додатків:

1. Ідентифікація параметрів математичних і геометричних моделей, чисельне рішення яких потребує великих витрат машинного часу.

2. Обробка результатів багатофакторних експериментів з метою побудови складних математичних моделей з невідомими параметрами.

3. Оптимізація процесів, які залежать від великого числа факторів.

4. Чисельне знаходження екстремальних точок для функцій багатьох змінних.

Формулювання цілей статті. Розробити методику визначення невідомих параметрів для рівняння поверхні відомого виду, яка достатньо близько проходить коло точок із заданими координатами.

Основна частина. Нехай функція $Y(a_0, a_1,... a_k, x_1, x_2,...x_n)$ відомого виду з невідомими параметрами a_0, a_1,... a_k визначає оригінал у вигляді деякої поверхні. Під виразом $Y(a_0, a_1,... a_k, x_1, x_2,...x_n)$ розуміється функція, яка може бути задана, наприклад, у вигляді аналітичного виразу, за допомогою багатовимірного відрізку - ряду Тейлора

$$Y(a_0, a_1,... a_k, x_1, x_2,...x_n)= a_0+a_1x_1+ a_2x_2+\dots a_kx_n + a_{12}x_1x_2+,\dots \qquad (3)$$

або за допомогою рівняння або системи рівнянь. Обмежимося аналізом випадку, коли $Y(a_0, a_1,... a_k, x_1, x_2,...x_n)$ є неперервною і монотонною в області D за всіма параметрами і всіма змінними і має не більше одного екстремуму (рис.1).

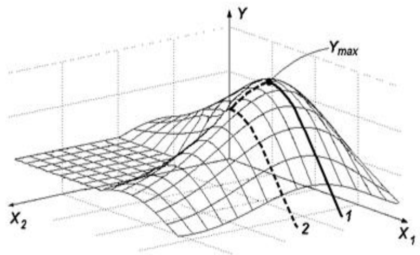

Рис. 1 – Поверхня у трьохвимірному декартовому просторі

Припустимо, що для m точок з координатами x_{1i},, x_{2i},... x_{ni} , где i=1,2…m, ця функція має нечітко задані значення (1). Потрібно оцінити її невідомі параметри a_0, a_1,... a_k, які забезпечують мінімум сумі квадратів відхилень функції у заданих точках від наближеного значення в цих точках (2). Фактично, мова йде про мінімізацію не лише квадратичної форми (2), але й інтегрального її аналога:

$$W=\int(Y(a_0, a_1,... a_k, x_1, x_2,...x_n)- Y^*(a^*_0\ a^*_1,...a^*_k, x_1, x_2,...x_n))^2 d\,x_1 d\,x_2\,...dx_n, \qquad (4)$$

де інтегрування відбувається за заданою областю D.

Рішення задачі. Рівняння вихідної поверхні можна надати у вигляді «чорного ящику» з k+1 внутрішніми параметрами a_0, a_1, a_2,... a_k, поведінка якого визначається завданням n вхідних факторів x_1, x_2,...x_n.

Рішення задачі для довільних точок x_{1i}, x_{2i},... x_{ni} містить багато підводних каменів, які, в основному, пов‘язані з кореляційними залежностями між координатами точок. Приклад. Нехай під час побудови поверхні у трьохвимірному просторі всі задані точки лежать на прямій. Очевидно, що в цьому випадку можна побудувати нескінченно велике число поверхонь, які проходять крізь ці точки, й задача виявиться невизначеною. Використання теорії планування експериментів, в якій забезпечується відсутність кореляції між точками, які обираються, дозволяє отримати коректне рішення.

Ефективність методу заснована теоретично в роботах, Бокса, Уілксона, Адлера Ю. П., Ермакова С. М. [6], [7] й доведена в численних прикладах під час досліджень в різних галузях науки й техніки [8], [9], [10].

Викладемо основну ідею методу рішення поставленої задачі. Нехай область визначення функції D являє собою багатовимірний паралелепіпед з ребром $2\delta_i$ (i=1,2…m) і центральною точкою $x_{10}, x_{20},... x_{n0}$. В теорії планування експерименту область D називається n – мірним факторним простором. Перенесемо початок координат в точку $x_{10}, x_{20},... x_{n0}$ і введемо нормовані координати за формулами

$$z_i= (x_i - x_{i0})/ \delta_i \tag{5}$$

Перехід до нової системи координат перетворює область D на багатовимірний куб з $N=2^n$ вершинами, координати яких дорівнюють ±1. Приклад матриці координат вершин для n=2 наведений в табл. 1. Легко переконатися, що коефіцієнт кореляції між стовпцями координат z_1 і z_2 дорівнює нулю.

Таблиця 1 -

Матриця координат вершин кубічної області D для n=2

Номер вершини, i	Z_{1i}	z_{2i}	Y_i
1	-1	-1	Y_1
2	+1	-1	Y_2
3	-1	+1	Y_3
4	+1	+1	Y_4

Розглянемо найпростіший випадок, коли рівняння поверхні визначає багатовимірну площину і формула (3) для відрізку ряду Тейлора в нормованій системі координат містить лише лінійні члени

$$Y(a_0, a_1,... a_k, z_1, z_2,...z_n)= a_0+a_1z_1+ a_2z_2+…a_kz_n \tag{5}$$

Будемо вимагати, щоб число точок m, для яких за допомогою формул (1) задані наближені значення, дорівнювало числу вершин куба N

$$m = N = 2^n. \tag{6}$$

а координати саме точок співпадали з цими вершинами.

Множина значень вхідних факторів z_1, z_2,...z_n, які задовольняютьу умові (6), будемо називати повною множиною для введеного n – мірного факторного простору (ПМФП). В цьому випадку кожний з вхідних факторів приймає одне з двох значень, які дорівнюють -1 або +1. Приклад ПМФП для n=2 наведений в табл. 1 й на рис. 2.

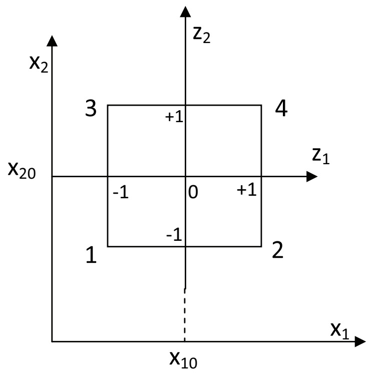

Рис.2. Системи координат

Легко переконатися, що у випадку ПМФП для нормованої системи координат є справедливими наступні рівності:

$$\sum_{i=1}^{N} z_{ji} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} z_{ji}^2 = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} z_{ji} z_{ki} = 0,\ k \neq j \tag{7}$$

Перша з них відображує симетричність матриці нормованих координат z_1, z_2,... z_n відносно центру, друга є умовою нормування, третя – умовою ортогональності. В цьому випадку параметри a_0, a_1,... a_k, у рівнянні (5) можуть бути оцінені за допомогою формул [6]:

$$a_i \approx a_i^* = (\sum_{j=1}^{j=N} z_{ij} Y_j) / N, i = 0,1,2,..k \tag{8}$$

і модельне уявлення площини (5) приймає вид:

$$Y(a^*_0, a^*_1,...a^*_k, z_1, z_2,...z_n) = a^*_0 + a^*_1 x_1 + a^*_2 x_2 + \ldots a_k x_n \tag{9}$$

Якщо для i-ї точки, i=1,2…m, відомі вибірки з r наближених її значень Y_{is}, s=1,2,… r, які підкоряються нормальному закону, тоді шляхом порівняння дисперсії відтворюваності

$$s_v^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{r} (Y_{is} - Y_i^0)^2 / N(r-1) \tag{10}$$

й дисперсії адекватності

$$s_{аддек}^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_{ir} - Y_i^0)^2 / (N-k), \tag{11}$$

де Y_i^0 – середнє значення для Y_{is}, s=1,2,… r, Y_{ir} – значення, яке розраховане за формулою (9), можна оцінити адекватність моделі (9) з використанням критерію Фішера для N-k й N(n-1) ступенів свободи:

$$F = s_{аддек}^2 / s_v^2 \tag{12}$$

Дисперсія похибки під час обчислення параметрів (8) дорівнює

$$s^2_{aj} = s_v^2 / N \tag{13}$$

На закінчення оцінимо нев‘язку в інтегральній формі (4). Підставляючи точне рівняння площини (5) і його наближене значення у вигляді відрізку ряду Тейлора з (9) у вираз (4), наведений в нормованій системі координат, отримаємо:

$$W = \int_{-1}^{+1} \ldots \int_{-1}^{+1} (a_i - a_i^*)^2 dz_1 \ldots dz_n = 2\ n. \tag{14}$$

Оскільки дисперсія для всіх параметрів a_0, a_1,... a_k, є однаковою й дорівнює (13), тоді після підстановки (13) в (14) маємо наступну оцінку нев‘язки:

$$W = 2 s_v^2 \tag{15}$$

Формула (15) не враховує похибки обчислень. Під час використання сучасних обчислювальних засобів ця похибка є невеликою й нев‘язка між точним (5) і наближеним (9) рівняннями площини з достатньою точністю дорівнює подвоєній дисперсії відтворюваності (10). Звернімо увагу на те, що значення s_v^2 є випадковою величиною, яка зі зростанням n і r наближається до математичного очікування дисперсії відтворюваності σ^2_v. Для конкретного багатовимірного простору значення n є константою, тому при завданні Y_i можна розглядати можливість збільшення лише об‘єму вибірки r. Збільшення r у відповідності з формулою (10) призведе до зниження σ^2_v, до зменшення нев‘язки W та, відповідно, до підвищення точності моделі.

Якщо рівняння поверхні не є площиною і (або) містить екстремум, як показано на Рис. 1, тоді для знаходження параметрів a_0, a_1,... a_k рекомендується наступний покроковий метод:

1. Досліджуване рівняння є неперервним за всіма змінними, тому припустиме розкладення його в ряд Тейлора. На першому етапі з використанням формул (8) визначимо наближені значення параметрів. Апроксимація поверхні за допомогою отриманої моделі (9) буде відрізнятися від точного її зображення тим більше, чим більше оригінал відрізняється від рівняння площини.
2. На другому етапі можна перейти до мінімізації квадратичної форми (4) з використанням дробових реплік [6] або градієнтних методів [11]. В якості стартової точки використовуються значення a_0, a_1,... a_k, які розраховані на першому етапі. Проведені чисельні експерименти в цьому напрямку, показали, що градієнтні методи, наприклад метод найшвидшого спадання [12], дають задовільні результати.

Висновки. Методи побудови ліній і поверхонь із заданими точними значеннями координат викладені в багатьох публікаціях [11], [12]. В даній статті розглянуто можливість побудови геометричної моделі поверхні в багатовимірному просторі для рівняння відомого виду з невідомими параметрами у випадку наближеного завдання реперних точок (1) і на основі теорії планування експериментів [6], [7] розроблений алгоритм ідентифікації невідомих параметрів для рівнянь подібного типу. Запропонована методика апробована на функціях, неперервних за своїми координатами і параметрами.

Література

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы /*Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков*//. М.: Наука. Физматлит, 1987. - 600 С.
2. *Найдыш В. М.* Дискретна інтерполяція /*В. М. Найдыш*//. Мелітополь: 2008.-250 С.
3. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей /*В. Ф. Каган*//. М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1947. -.ч. 1. -512 С.
4. *Куценко Л. М.* Побудова поверхонь, які відповідають різновидам розв’язків диференціального рівняння SIN-Гордона /*Л. М. Куценко, О.С. Сидоренко*//. Збірник наукових праць ХДУХТ «Геометричне та комп’ютерне моделювання». – Харьків: 2009. - Вип. 23. С.31-41.
5. *Єремєєв В. С.* Графічний метод розв’язання задач нечіткого лінійного програмування з чітко поставленою метою при нечітких обмеженнях /*В. С. Єремєєв, С. О. Баришевський*//. Збірник наукових праць ТДАУ «Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь: 2011. – Том 49, вип. 4. С. 27-32.
6. *Адлер Ю.П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий /*Ю.П. Адлер*//. М.: Наука, 1976. - 279 С.

7. Математическая теория планирования эксперимента. *Ермаков С.М., Бродский В. Ж., Фёдоров В. В.* и др. М.: Наука, 1983. – 392 с.

8. *Antony Jiju*. Design of Experiments for Engineers and Scientists. Oxfprd: OX2 SDP 200 Wheler Road, MA 01 803, 2003. – 152 p.

9. *Спиридонов А.А.* Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов. М.: Машиностроение, 1981. – 184 с.

10. *Зубарев Ю.М., Нечаев К.Н., Катенев В.И., Ревин Н.Н.* Применение многофакторных экспериментов второго порядка в технологии машиностроении. СПб.: ПИМаш, 2002. – 134 с.

11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970. — С. 575-576.

12. *Еремеев В.С., Гамалий Ю.П.* Идентификация параметров математической модели кинетики массопереноса в одномерном случае. Тези міжнародної конференції “Прийняття рішень в умовах невизначеності” (Алушта. Вересень. 2003 в.). К.: Вид. КНУ ім. Т.Г.Шевченка, 2003. С.101-104.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В. С. Еремеев

Рассмотрена возможность определения неизвестных параметров уравнения поверхности в случае нечёткого задания точек для этой поверхности в многомерном пространстве. Предложен алгоритм построения соответствующей геометрической модели с использованием теории планирования экспериментов.

IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF GEOMETRIC MODELS BY THE MEHODS OF THE THEORY OF PLANNING EXPERIMENTS

V. S. Eremeev

The possibility of determination unknown parameters of the equation of the surface in case of fuzzy reference points for this surface in multidimensional space is considered. The algorithm of building corresponding geometric model using the theory of planning experiment is proposed.