УДК 624.012

Д. А. Єрмоленко, к.т.н.,
О. А. Кодак, к.т.н.

КІНЦЕВО-ЕЛЕМЕНТНА МОДЕЛЬ ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО БАГАТОШАРОВОГО ТІЛА НА ОСНОВІ ТОРОПОДІБНОГО ЕЛЕМЕНТА

*Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, Україна*

У статті розглянуто кінцево-елементну модель центрально стиснутого трубобетонного стрижня, в основу якої покладено тороподібний кінцевий елемент прямокутного поперечного перерізу із різною кількістю вузлів на сторонах.

Постановка проблеми. На основі великої кількості експериментальних досліджень трубобетонних конструкцій побудовано ряд теорій розрахунку. Але розмаїття геометричних та фізичних параметрів робить ці теорії частковими [1]. Для розробки загальної теорії роботи трубобетону під навантаженням потрібні глибокі дослідження напружено-деформованого стану. Застосування методів теорій пружності та пластичності можливе лише для окремих часткових випадків, які пояснюються тим, що трубобетон є комплексним матеріалом. Результати його роботи значно перевищують суму робіт компонентів поодинці. Виходом до такого аналізу можуть бути чисельні методи дослідження напружено-деформованого стану, наприклад, метод кінцевих елементів. Критерієм адекватності його застосування може бути порівняння з результатами експериментальних досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Процедура оцінки напружено-деформованого стану методом кінцевих елементів складається з декількох формалізованих етапів. Застосування деяких з них є традиційним і інваріантним [2] до цілого класу будівельних несучих конструкцій, зокрема, трубобетонних. Виключенням є етап складання матриці жорсткості системи, тому що основою для неї є характеристики кінцевих елементів, які складають розрахункову модель об'єкту дослідження [3]. Трубобетон є віссесиметричним тілом і його дискретну модель можна побудувати із застосуванням елементів розроблених у [3,4,5]. Але застосування таких елементів може бути обмежено потужностями існуючих розрахункових комплексів.

Формулювання цілей та завдання статті. Найбільш раціональною областю застосування трубобетону є центрально стиснуті стрижні несучих конструкцій, при цьому навантаження прикладається до крайніх перерізів через жорсткі плити. Компоненти трубобетону знаходяться в умовах плоского деформування. Все це дозволяє сконструювати комплексний кінцевий елемент. Метою роботи є отримання характеристик такого кінцевого (характерного) елемента.

Основна частина. Розглядається задача визначення напружено-деформованого стану стиснутого трубобетонного елемента під рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності $\boldsymbol{F}_n$. Головний вектор $\boldsymbol{R}_F$ зовнішнього зусилля спрямований уздовж поздовжньої вісі Oz розрахункового елемента і прикладений до фізичного центру ваги верхньої основи. Нижня основа спирається на жорстку опору (рис.1).

Дискретна модель трубобетону розглядається у циліндричній глобальній системі координат ρ,φ,z, початок якої розміщено у центрі ваги нижньої основи. При уявлені трубобетону як складеного циліндричного тіла, логічним є представлення його як системи, складеної з двох підсистем: товстостінного циліндричного тіла (повнотіле є частковим випадком), виконаного з матеріалу M_b; тонкостінної циліндричної оболонки, виконаної з матеріалу M_s. Так як осердя і оболонка та прикладене навантаження є вісесиметричними, тоді зусилля та переміщення не залежать від координати φ і тому достатньо дослідити їх лише у будь-якій меридіальній площині ρOz.

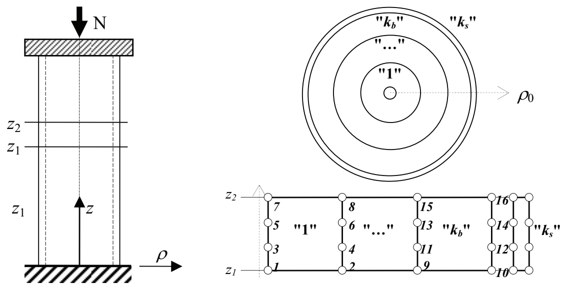

Рис.1. Кінцево-елементна модель трубобетону

Розрахункова сітка складається із системи координатних поверхонь [3]: система концентричних циліндрів $\rho = r_i$ ($i = 1..n$); система площин $z = z_k$ ($i = 0..l$), які паралельні $O\rho\varphi$.

Осердя і оболонка представлені тривимірним циліндричним тілом. Таким чином, для їх дискретизації застосовуються тороподібні елементи прямокутного поперечного перерізу зі сторонами $2a_{k\rho}$ та $2c_{kz}$. Форма отриманих при цьому КЕ для осердя та оболонки наведена на рисунку 1.

Порядок нумерації кінцевих елементів та вузлів наведено на рис.1. Вузли нумеруються уздовж вісі Oz починаючи від центру поперечного перерізу. Елементи нумеруються за тим же принципом, але окремо для осердя та оболонки. Кожному елементу осердя присвоєно номер $kb = 1,..,rb$, де rb – кількість кінцевих елементів осердя. Елементам оболонки присвоєно номер $ks = 1,..,rs$, де rs – кількість кінцевих елементів осердя. Загальна кількість кінцевих елементів складає $l = rb+rs$. Загальна кількість вузлів $p = 8rb + 8rs$.

Будемо вважати, що напружений та деформований стан розрахункового елемента визначається через два компоненти переміщень (u та v) вузлів запропонованої дискретної моделі.

Матриці кінцевих елементів побудовано у локальних нормалізованих координатах, початок яких розміщено у центральних точках відповідних елементів (рис.2), тобто у точках (ρ_{kOb}, z_{kOb}) та (ρ_{kOs}, z_{kOs}). Зв'язок між глобальною системою координат ρ,φ,z і локальними $\xi_{kb,i}$ та $\xi_{ks,i}$ визначається залежностями:

$$\xi_{kb,\rho} = (\rho_{kb} - \rho_{kOb})/a_{kb,\rho}, \qquad \xi_{kb,z} = (z_{kb} - z_{kOb})/c_{kb,z};$$
$$\xi_{ks,\rho} = (\rho_{ks} - \rho_{kOs})/a_{ks,\rho}, \qquad \xi_{ks,z} = (z_{ks} - z_{kOs})/c_{ks,z}; \tag{1}$$

$$\rho_{kb} = \rho_{kOb} + \xi_{kb,\rho}a_{kb,\rho}, \qquad z_{kb} = z_{kOb} + \xi_{kb,z}c_{kb,z};$$
$$\rho_{ks} = \rho_{kOs} + \xi_{ks,\rho}a_{ks,\rho}, \qquad z_{ks} = z_{kOs} + \xi_{ks,z}c_{ks,z}. \tag{2}$$

Основними невідомими приймаємо переміщення вузлових точок. Деформований стан в будь-якій точці описується вектор-функцією $\{\Delta_{kij}(\xi_\rho,\xi_z)\} = (\Delta_{ki1}(\xi_\rho,\xi_z), \Delta_{ki2}(\xi_\rho,\xi_z), ..., \Delta_{ki8}(\xi_\rho,\xi_z))$, компоненти якої є переміщеннями вузлів.

Внаслідок симетрії деформований та напружений стан у будь-якому перерізі по осі симетрії (меридіанній площині) повністю визначається двома компонентами переміщень. В меридіанній площині кожна точка має радіальну (ρ) та осьову (z) координати, та переміщення точки уздовж відповідних координат u та v, відповідно. Представлення поля переміщень КЕ через переміщення вузлових точок для прямокутного елемента ***n***-го порядку досить повно висвітлено в роботах [3,4], включаючи і ізопараметричне представлення.

$$\{\Delta_k(\xi)\} = [H_k(\xi)]\{\Delta_k\}, \tag{3}$$

де $\{\Delta_k(\xi)\}$ - поле переміщень k-го КЕ;

$[H_k(\xi)]$ - вектор-строка апроксимуючих функцій k-го КЕ;

$\{\Delta_k\}$ - вектор-стовбець вузлових переміщень k-го КЕ.

При завантаженні через жорсткий штамп складаються такі умови, що уздовж вісі ρ стає можливим лінійне інтерполювання, а уздовж z – криволінійне. Тому фігуру, яка характеризує поперечний переріз КЕ вибираємо у вигляді квадратного елемента третього (***n*** = 2 і >) порядку з різною кількістю проміжних вузлів на парах ортогональних сторін (рис. 2). Зображений на рис. 2 елемент має вісім вузлових точок. У відповідності до сформульованої задачі обираємо степені поліномів, якими буде апроксимуватися поле переміщень через вектори вузлових переміщень. Апроксимуючі функції приймаємо у вигляді формули Лагранжа, відповідно до порядку інтерполювання. Так переміщення u у k-му елементі апроксимуються поліномом першого степеню, а переміщення v – третього:

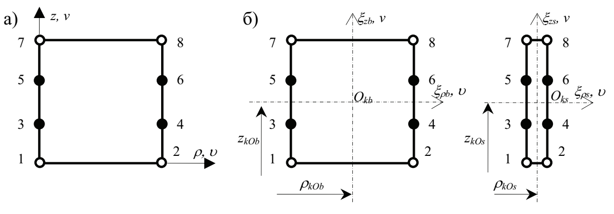

Рис.2. Поперечний переріз КЕ: а) – у глобальних координатах; б) – у локальних координатах

Представимо функцію форми у вигляді перемноження апроксимуючих функцій у напрямку координатних осей:

$$H_{k,\rho z,i}(\xi) = H^{1}_{k,\rho,i}\left(\xi_{k,\rho}\right) \cdot H^{3}_{k,z,i}\left(\xi_{k,z}\right), \tag{4}$$

де $H_{k,\rho\varphi}(\xi)$ - матриця апроксимації розміру 2×8 *k*-го КЕ, ненульові елементи якої визначаються за [6].

Для вирішення задачі у нелінійній частині достатньо мати рішення у лінійній постановці, а далі задача вирішується поетапно. При цьому на кожному з етапів змінюються фізико-механічні характеристики, такі як модуль деформацій та коефіцієнт поперечної деформації матеріалів. Використовуються діаграми роботи матеріалів і ітераційний процес. Застосовується метод змінних параметрів пружності.

Висновки. Оскільки розмаїття фізико-механічних та геометричних параметрів центрально стиснутих трубобетонних елементів досить велике, рекомендується досліджувати напружено-деформований стан за допомогою методу кінцевих елементів із використанням тороподібних кінцевих елементів. Поперечний переріз останніх у вигляді прямокутника з різною кількістю вузлів на сторонах найбільш точно описує процес деформування центрально стиснутого трубобетону.

Література

1. *Стороженко Л. І., Єрмоленко Д. А., Лапенко О. І.* Трубобетон: Моногра-фія. – Полтава: ПолтНТУ, 2009. –306 с.

2. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / *А. С. Городецький, В. И. Зоворицкий, А. И. Лантух-Лященко, А. О. Рассказов*. - М.: Транспорт, 1981. – 143 с.

3. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. -428 с.

4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

5. *Клованич С. Ф.* Модель деформирования железобетона и расчет конструкций при сложном напряженном состоянии и нагреве. Дис. … доктора техн. наук. – М., 1990. – 400 с.

6. *Єрмоленко Д. А.* Оцінка напружено-деформованого стану розрахункового елемента трубобетонного стрижня методом кінцевих елементів / *Д. А. Єрмоленко* // Міжвідомчий науково-технічний збірник наукових праць (будівництво) «Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону». Зб. наук. праць у 2-х книгах. – Київ: НДІБК, 2011. – Вип. 74, Кн. 1. – С.451- 457

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО МНОГОСЛОЙНОГО ТЕЛА НА ОСНОВЕ ТОРОПОДОБНОГО ЭЛЕМЕНТА

Д. А. Ермоленко, О. А. Кодак

В статье рассмотрено конечно-элементную модель центрально сжатого трубобетонного стержня, в основу которой положен тороподобный конечный элемент прямоугольного поперечного сечения с различным количеством узлов на сторонах.

THE LIMITED-ELEMENTAL MODEL OF AXIALLY-SIMMETRIC MULTILAYERED BODY BASED ON TORUS-LIKE ELEMENT

D. A. Yermolenko, O. A. Kodak

The article considers the limited-elemental model of centrally compressed concrete filled steel tube bar, based on a torus-like limited element of rectangular cross section with different quantity of joints on the sides.