УДК 514.181.2

Т. М. Захарова

КОНСТРУЮВАННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ У ФУНКЦІЇ ДОВЖИНИ ДУГИ, ЗА ДОПОМОГОЮ СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА ВИХІДНОЇ КРИВОЇ. ЧАСТИНА 2

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Знайдено натуральні і параметричні рівняння кривої, як абсолютної траєкторії складного руху точки. Абсолютна траєкторія є сумою двох рухів: відносного руху точки в системі тригранника Френе і переносного руху тригранника по заданій плоскій кривій. Здійснено візуалізацію отриманих кривих.

Постановка проблеми. У диференціальній геометрії особливе значення мають параметричні рівняння кривої у функції довжини власної дуги, що дають змогу завжди знайти натуральне рівняння кривої. Деякі підходи до конструювання кривих, що можуть бути описані у такій формі, наводяться у науковій літературі. Однак множину кривих можна значно розширити, якщо точку рухати за певним законом у системі тригранника Френе. Утворена крива буде абсолютною траєкторією складного руху точки, який є сумою двох рухів: відносного в системі тригранника і переносного руху самого тригранника по заданій кривій.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Відомою є теорія складного руху матеріальної точки, яка вивчає рух точки одночасно по відношенню до нерухомої системи координат та такої, яка здійснює по відношенню до нерухомої відносний рух по заданому закону. Теоретична механіка, окрім того, оперує натуральним (природнім) способом задання руху точки, при якому швидкість і прискорення розглядаються в проекціях на орти супровідного тригранника Френе. Також тригранник Френе знайшов своє застосування в задачах кінематики і динаміки складного руху матеріальної точки [1, 3, 4]. У [2] нами розглянуто можливість конструювання кривих за допомогою супровідного тригранника Френе за умови руху точки в системі тригранника, що свідчить про формотворчі властивості запропонованого підходу та про перспективність розробок інших підходів на основі тригранника Френе.

Формулювання цілей та завдання статті. Знайти нові плоскі криві, які можуть бути описані параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги, із використанням супровідного тригранника Френе.

Основна частина. Нехай вершина тригранника знаходиться в точці *A* плоскої кривої (рис. 1). Координати точки *B* на орти дотичної $\overline{\tau}$ і головної нормалі $\overline{n}$ відповідно запишуться ρ_τ і ρ_n. Ці координати є функціями довжини дуги *s* вихідної кривої, тобто $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ і $\rho_n = \rho_n(s)$. При цьому абсолютна траєкторія точки *B* описується параметричними рівняннями [4]:

$$x_B = \rho_\tau \cos\left(\int k ds\right) - \rho_n \sin\left(\int k ds\right) + \int \cos\left(\int k ds\right) ds;$$
$$y_B = \rho_\tau \sin\left(\int k ds\right) + \rho_n \cos\left(\int k ds\right) + \int \sin\left(\int k ds\right) ds. \quad (1)$$

Похідні рівнянь (1) та вираз для визначення довжини дуги конструйованої кривої мають вигляд [4]:

$$x'_B = (1 - k\rho_n + \rho'_\tau)\cos\left(\int k ds\right) - (k\rho_\tau + \rho'_n)\sin\left(\int k ds\right);$$
$$y'_B = (1 - k\rho_n + \rho'_\tau)\sin\left(\int k ds\right) + (k\rho_\tau + \rho'_n)\cos\left(\int k ds\right). \quad (2)$$

$$s_B = \int \sqrt{x'^2_B + y'^2_B}\, ds = \int \sqrt{(1 - k\rho_n + \rho'_\tau)^2 + (k\rho_\tau + \rho'_n)^2}\, ds. \quad (3)$$

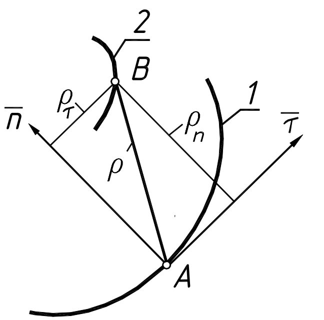

Рис. 1. Точка *B* в системі супровідного тригранника (бінормаль $\overline{b}$ проекціюється в точку): 1 – вихідна крива; 2 – конструйована крива (абсолютна траєкторія точки *B*).

Перепоною в отриманні аналітичного виразу довжини дуги є інтегрування підкореневого виразу (3), оскільки дуже часто інтегрування функцій під квадратним коренем не приводить до аналітичного виразу, тобто підінтегральний вираз не може бути проінтегрований. Однак цього можна уникнути у виразі (3) за допомогою розв’язання системи диференціальних рівнянь, у якій одна з дужок підінтегрального виразу дорівнюватиме нулю, а інша – певній функції *φ(s)*:

$$\begin{cases} 1 - k\rho_n + \rho_\tau' = 0 \\ k\rho_\tau + \rho_n' = \varphi(s) \end{cases} \quad \text{або} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 1 - k\rho_n + \rho_\tau' = \varphi(s) \\ k\rho_\tau + \rho_n' = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Таким чином з’являється можливість конструювати супутні криві до заданої вихідної кривої, підібравши функцію *φ(s)* так, щоб її можливо було проінтегрувати, та вивчати їх властивості. Функції $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ і $\rho_n = \rho_n(s)$ при цьому визначаються шляхом розв’язку системи диференціальних рівнянь (4) або (5).

Дослідження показали, що вибір системи диференціальних рівнянь для конструювання кривої не впливає на форму останньої, а тому розглянемо лише систему (5).

Перші похідні рівнянь (1) у такому випадку спрощуються:

$$x'_B = (1 - k\rho_n + \rho'_\tau)\cos\left(\int k ds\right) = \varphi(s) \cdot \cos\left(\int k ds\right);$$
$$y'_B = (1 - k\rho_n + \rho'_\tau)\sin\left(\int k ds\right) = \varphi(s) \cdot \sin\left(\int k ds\right). \quad (6)$$

Для знаходження кривини $k_B = k_B(s)$ конструйованої кривої за відомою формулою:

$$k_B = \frac{x'_B y''_B - y'_B x''_B}{\left(x'^2_B + y'^2_B\right)^{3/2}} \tag{7}$$

продиференціюємо (6) по s, отримуючи другі похідні:

$$\begin{aligned} x''_B &= \left(\rho''_\tau - k'\rho_n - k\rho'_n\right)\cos\left(\int kds\right) - k\left(1 - k\rho_n + \rho'_\tau\right)\sin\left(\int kds\right); \\ y''_B &= \left(\rho''_\tau - k'\rho_n - k\rho'_n\right)\sin\left(\int kds\right) + k\left(1 - k\rho_n + \rho'_\tau\right)\cos\left(\int kds\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Підстановкою (6) і (8) у (7) після спрощень отримаємо:

$$k_B = \frac{k}{1 - k\rho_n + \rho'_\tau} = \frac{k}{\varphi(s)}. \tag{9}$$

Проте, натуральне рівняння кривої (9) є функцією не власної дуги s_B, а функцією «чужої» дуги s вихідної кривої. Довжину власної дуги можна визначити із рівняння (3):

$$s_B = \int\left(1 - k\rho_n + \rho'_\tau\right)ds = \int(\varphi(s))ds. \tag{10}$$

Інтегруючи (6), отримаємо параметричні рівняння конструйованої кривої у функції «чужої» дуги:

$$\begin{aligned} x_B &= \int\varphi(s)\cdot\cos\left(\int kds\right)ds; \\ y_B &= \int\varphi(s)\cdot\sin\left(\int kds\right)ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Виключаючи спільну змінну s із рівнянь (10) і (11), отримаємо параметричні рівняння кривої у функції довжини власної дуги s_B. Натуральне рівняння кривої у функції довжини власної дуги отримаємо із (9) при переході від s до s_B шляхом підстановки виразу $s = s(s_B)$, який потрібно знайти із (10).

Використовуючи наведений підхід, нами було з'ясовано, що при $\varphi=1$ на основі кола конструйованою кривою є конгруентне коло. Окрім того, при різних $\varphi(s)$ можна отримати деякі відомі криві, зокрема при $\varphi=e^{as}$ утворюється логарифмічна спіраль.

Проте, нам вдалося знайти дві нові криві, які можуть бути описані параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги: при $\varphi=cos(as)$ та при $\varphi=cosh(as)$. Наводимо їх параметричні та натуральні рівняння.

Для $\varphi=cos(as)$:

$$\begin{aligned} k_B &= \frac{k}{\sqrt{1 - a^2\cdot s_B^2}}; \\ x_B &= \frac{a^2\cdot s_B\cdot\cos A - k\cdot\sqrt{1 - a^2\cdot s_B^2}\cdot\sin A}{a^2 - k^2}, \\ y_B &= \frac{a^2\cdot s_B\cdot\sin A + k\cdot\sqrt{1 - a^2\cdot s_B^2}\cdot\cos A}{a^2 - k^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для $\varphi=cosh(as)$:

$$k_B = \frac{k}{\sqrt{1 + a^2 \cdot s_B{}^2}};$$

$$x_B = \frac{a^2 \cdot s_B \cdot \cos A + k \cdot \sqrt{1 + a^2 \cdot s_B{}^2} \cdot \sin A}{a^2 + k^2}, \tag{13}$$

$$y_B = \frac{a^2 \cdot s_B \cdot \sin A - k \cdot \sqrt{1 + a^2 \cdot s_B{}^2} \cdot \cos A}{a^2 + k^2}.$$

У наведених рівняннях $A = \dfrac{k \cdot \arcsin(a \cdot s_B)}{a}$.

На рисунку 2 за наведеними рівняннями побудовані криві, що мають вигляд спіралей.

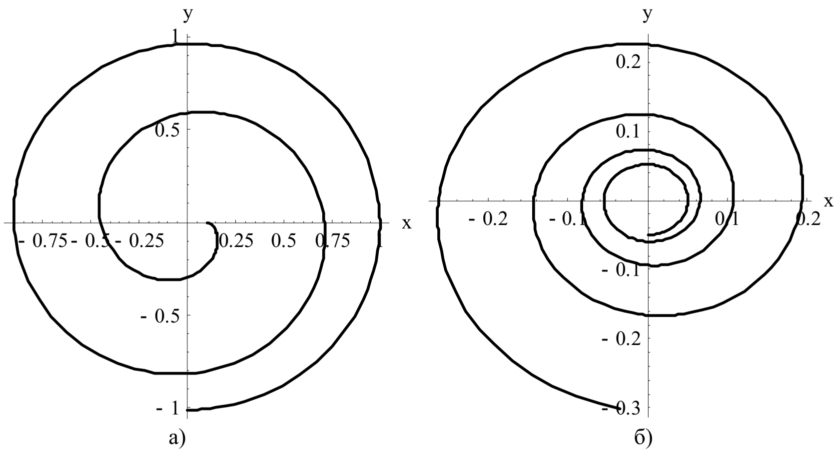

Рис. 2. Криві, побудовані за:
а) рівняннями (12) при $a=0,1$ на основі кола $k=1$;
б) рівняннями (13) при $a=2$ на основі кола $k=20$.

Окрім того, за запропонованим підходом при $\varphi=as^n$ для додатних цілих n нам вдалося знайти певний клас кривих, узагальнене натуральне рівняння яких має вигляд:

$$k_B = \frac{k}{\sqrt[n+1]{a \cdot \left(s_B \cdot (n+1)\right)^n}}. \tag{14}$$

На рисунку 3 побудовано отримані криві для деяких значень n.

За допомогою запропонованого підходу можна конструювати нові криві не лише на основі кола, а й на основі інших кривих. Наприклад, якщо за базову криву прийняти ланцюгову лінію, а за функцію $\varphi(s)$ – вираз

$\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + s^2}}$, отримаємо криву, візуально схожу на ланцюгову лінію рівного опору. Дана крива наведена на рисунку 4. Наводимо її натуральні та параметричні рівняння у функції довжини власної дуги, при чому останні можуть бути виражені двома способами:

$$k_B = \frac{4a \cdot e^{s_B}}{4a^2 + e^{2s_B}};$$

$$x_B = -arctg(a \cdot e^{-s_B} - \frac{e^{s_B}}{4a}), \quad y_B = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{1}{16}e^{-2s_B} \cdot \left(4a^2 + e^{2s_B}\right)^2\right); \tag{15}$$

або $$x_B = 2arctg\left(\frac{e^{s_B}}{2a}\right), \qquad y_B = \lg\left(2 \cdot (4a^2 + e^{2s_B})\right) - s_B.$$

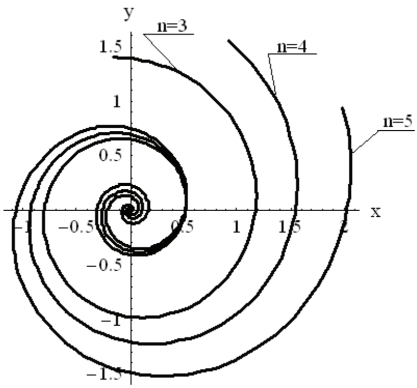

Рис. 3. Криві, побудовані за рівнянням (14) при *a=10* на основі кола *k=20* для прийнятих значень *n*.

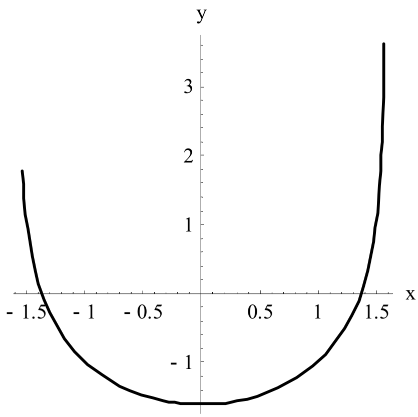

Рис. 4. Крива, побудована за рівнянням (15) при *a=0,2*.

Висновки. Нами запропоновано один із підходів до конструювання кривих за допомогою супровідного тригранника на основі складного руху точки, за яким на основі кола знайдено дві нові спіралі. Вони описані параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги, а також знайдено певний клас кривих, що описуються натуральними рівняннями узагальненого виду. Для деяких випадків здійснено візуалізацію отриманих результатів. Окрім того, нами знайдено нову криву на основі ланцюгової лінії. Даний підхід дає можливість конструювати нові криві на основі різних базових кривих, що свідчить про широкі формотворчі властивості запропонованого підходу.

Перспективи подальших досліджень полягають у знаходженні інших груп кривих, які мають натуральне рівняння.

Література

1. *Войтюк Д.Г., Пилипака С.Ф.* Дослідження руху матеріальної частинки по горизонтальному диску, який обертається навколо вертикальної осі, за допомогою рухомого натурального тригранника і формул Френе // Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник. – Глеваха, 2005. – Вип.89. – С.49-60.
2. *Захарова Т.М.* Конструювання плоских кривих, що описуються рівняннями у функції довжини дуги, за допомогою супровідного тригранника вихідної кривої / Т.М. Захарова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Том 53. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 57 – 65.
3. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. В двух томах – Т. 1: Статика и кинематика. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 379 с.
4. *Пилипака С.Ф.* Теорія складного руху матеріальної точки на площини. Частина перша. Абсолютні швидкість і траєкторія // Електротехніка і механіка. – К., 2006. – №1. – С. 84-94.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ, КОТОРЫЕ ОПИСЫВАЮТСЯ УРАВНЕНИЯМИ В ФУНКЦИИ ДЛИНЫ ДУГИ, С ПОМОЩЬЮ СОПРОВОДИТЕЛЬНОГО ТРЕХГРАННИКА ИСХОДНОЙ КРИВОЙ. ЧАСТЬ 2.

Т. Н. Захарова

Найдено натуральные и параметрические уравнения кривой, как абсолютной траектории сложного движения точки. Абсолютная траектория является суммой двух движений: относительного движения точки в системе трехгранника Френе и переносного движения трехгранника по заданной плоской кривой. Осуществлена визуализация полученных кривых.

CONSTRUCTING OF THE FLAT CURVES WHICH ARE DESCRIBED WITH THE EQUATIONS IN THE FUNCTION OF LENGTH OF ARC WITH THE ACCOMPANYING TRIHEDRON OF INITIAL CURVE. PART 2.

T. Zakharova

Natural and parametrical equations of the curve were founded, as an absolute trajectory of the difficult motion of the point. An absolute trajectory is the sum of two motions: relative motion of the point in the system of trihedron of Frene and portable motion of trihedron on the set flat curve. Visualization of the got curves was carried out.