УДК 519.6+514.7

В. А. Карпенко, к.ф.-м.н,
А. Ю. Клещев

ВЛИЯНИЕ ЗНАКА КРИВИЗНЫ НА ПОВЕДЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ

*Таврический национальный университет
им. В. И. Вернадского, Украина*

Исследуется классический подход к построению составного параметрического сплайна, предложенный Фоксом и Праттом. При его практической реализации возникают нежелательные геометрические эффекты и проблемы с численной реализацией. Предлагаемая модификация позволяет решить эти проблемы. Улучшение удалось достигнуть за счет использования «знака» кривизны и проведенного параметрического анализа. Получено условие, соблюдение которого обеспечивает достаточные условия устойчивого счёта. По результатам исследования создан программный модуль, использование которого позволяет за счет подбора параметров получить желаемый сплайн.

Постановка проблемы. Не вызывает сомнений актуальность решения задач построения различных сечений объектов, их проекций или полностью поверхностей с использованием машинной графики. Все эти задачи сводятся к проблеме аналитического описания и графического представления кривых и поверхностей. Целью работы является исследование возможностей применения для построения составного параметрического сплайна класса гладкости C^2 методики, предложенной А. Фоксом и М. Праттом, связанное с внесением поправок в этот классический подход. Дело в том, что при его применении в варианте, изложенном в [1] возникают такие нежелательные геометрические эффекты как, например, изломы или петли при определенных расположениях интерполируемых точек. Такие эффекты крайне нежелательны, хотя бы с точки зрения эстетических требований.

Анализ последних исследований. Несмотря на колоссальное количество работ по геометрическому моделированию кривых и поверхностей выполненных за последние 30 лет, на данный момент авторам неизвестны работы, в которых проведено именно такое исследование.

Постановка задачи. Пусть кривая задана параметрическим представлением $r = \vec{r}(u); u \in [0,1]$. Рассмотрим конструирование составных кривых на основе параметрически заданных сегментов. Пусть имеется 2 порции кривых, построенных некоторым методом: $\vec{r}_1(u)$ и $\vec{r}_2(u); u \in [0,1]$. Тогда, как правило, для конструирования сплайна гладкости C^2 используются следующие три условия [1].

1)Условие непрерывности:

$$\vec{r}_1(1) = \vec{r}_2(0) \tag{1}$$

2) Условие непрерывности вектора градиента по направлению:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1(1) = \alpha_1 \vec{T} \\ \dot{\vec{r}}_2(0) = \alpha_2 \vec{T} \end{cases}, \qquad (2)$$

где T - некоторый единичный касательный вектор в точке соединения двух порций. Очевидно, что α_1, α_2 - одного знака. Пусть для определенности α_1 >0, α_2 >0, т.е. в точке соединения двух порций касательные векторы должны быть коллинеарные и сонаправленные и при этом могут отличаться по модулю.

3) Условие непрерывности кривизны . Для использования этого условия воспользуемся формулой [2]:

$$k\vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}, \qquad (3)$$

где $\vec{B}$ - вектор бинормали, k -кривизна.

Подставляя (2) в (3) получим:

$T \times \ddot{\vec{r}}_2(0) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 T \times \ddot{\vec{r}}_1(1)$. Обозначим $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ и окончательно:

$$\ddot{\vec{r}}_2(0) = \lambda^2 \ddot{\vec{r}}_1(1) + \mu \dot{\vec{r}}_1(1) \quad . \qquad (4)$$

В (4) появление параметра μ обусловлено тем, что векторное произведение коллинеарных векторов равно 0. Таким образом, так как этот параметр не имеет явного геометрического смысла, то ему может быть присвоено любое значение. Эти формулы, естественно, подходят для любого представления $\vec{r}(u)$. Формула (3) для плоских кривых, представленных в виде x = x (t), y = y(t) может быть записана в виде : [2]

$$k = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Основная часть. Однако практическое применение формул (1),(2),(4) при построении составного параметрического сплайна показывает, что геометрически приемлемые результаты в этом случае получаются только, если переход от одной порции к другой осуществляется так, что обе находятся по одну сторону от касательной в точке соединения. Иначе возникают участки с резким изменением касательного вектора и даже петли, что вряд ли можно считать приемлемым для практического применения. Чтобы решить эту проблему, например для плоских кривых целесообразно отнести кривизне знак, считая ее в одних случаях положительной, в других — отрицательной. При этом пользуются следующим соображением. Касательный вектор кривой при движении вдоль кривой в направлении возрастающих t поворачивается. *В зависимости от направления вращения касательного вектора кривизну считают положительной или отрицательной.* Если определить этим условием знак кривизны плоской кривой, то для нее получается формула:

$$k = \delta \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ где } \delta = +1 \text{ или -1}.$$

Обоснование этого можно получить из дифференциальной геометрии. Дело в том, что кривизна кривой – это скорость поворота кривой, то есть модуль производной вектора касательной, или вторая производная в данной точке. А так как при изменении знака поворот вектора касательной уходит в противоположную сторону, то получаем, что кривая при отрицательных значениях кривизны будет менять направление.

Пусть, например, порция параметрической кривой задается следующей формулой:

$$\bar{r}(u) = \bar{r}(0)(1 - 3u^2 + 2u^3) + \bar{r}(1)(3u^2 - 2u^3) + \dot{\bar{r}}(0)(u - 2u^2 + u^3) + \dot{\bar{r}}(1)(-u^2 + u^3) \quad (5)$$

Условие непрерывности кривизны (4) будем теперь использовать теперь в таком виде:

$$\ddot{\bar{r}}_2(0) = \delta\lambda^2 \ddot{\bar{r}}_1(1) + \mu \dot{\bar{r}}_1(1) \quad (6)$$

где r_1 и r_2 - два соседних сегмента, λ – коэффициент, показывающий отношение модулей касательных векторов в точке соединения этих сегментов, а μ – некая произвольная константа. Особую роль играет коэффициент $\delta = \pm 1$. Если два сегмента соединены так, что они оба находятся по одну сторону от касательной в точке соединения, то нужно положить $\delta = 1$, а если по разные стороны, то $\delta = -1$. Определим значения $\ddot{\bar{r}}_2(0)$, $\ddot{\bar{r}}_1(1), \dot{\bar{r}}_1(1)$. Для этого для начала найдём производные:

$$\dot{\bar{r}}(u) = \bar{r}(0)(-6u + 6u^2) + \bar{r}(1)(6u - 6u^2) + \dot{\bar{r}}(0)(1 - 4u + 3u^2) + \dot{\bar{r}}(1)(3u^2 - 2u)$$

$$\ddot{\bar{r}}(u) = \bar{r}(0)(-6 + 12u) + \bar{r}(1)(6 - 12u) + \dot{\bar{r}}(0)(-4 + 6u) + \dot{\bar{r}}(1)(6u - 2)$$

Подставим в уравнение (6):

$$-6\bar{r}_2(0) + 6\bar{r}_2(1) - 4\dot{\bar{r}}_2(0) - 2\dot{\bar{r}}_2(1) = \delta\lambda^2(6\bar{r}_1(0) - 6\bar{r}_1(1) + 2\dot{\bar{r}}_1(0) + 4\dot{\bar{r}}_1(1)) + \mu\dot{\bar{r}}_1(1)$$

Учитывая условия (1) и (2), получаем:

$$\dot{\bar{r}}_2(1) + 2\dot{\bar{r}}_2(0)(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda) + \delta\lambda^2\dot{\bar{r}}_1(0) = 3\bar{r}_2(1) - 3\bar{r}_2(0)(1 - \delta\lambda^2) - 3\delta\lambda^2\bar{r}_1(0) \quad (7)$$

В частном случае при $\mu = 0, \lambda = 1$ (модули касательных векторов обеих порций в точке соединения равны), получим уравнение для определения значений касательных векторов:

$$\dot{\bar{r}}_2(1) + 2\dot{\bar{r}}_2(0)(\delta + 1) + \delta\dot{\bar{r}}_1(0) = 3\bar{r}_2(1) - 3\bar{r}_2(0)(1 - \delta) - 3\delta\bar{r}_1(0) \quad (8)$$

Рассмотрим случай формирования составной кривой из нескольких сегментов по общей формуле (7). Пусть известно множество образующих точек и производные на первой и последней из них. Поставим задачу найти производные в остальных точках. Учитывая, что уравнения (7) можно записать во всех точках соединения порций задача сводится к решению системы [3]: $A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = f_i$, *i=1..n* коэффициенты которой при $A_1 = C_n = 0$ образуют трёхдиагональную матрицу. Однако следует сразу отметить, что для случая $\mu = 0, \lambda = 1$ (8), все диагональные элементы B_i при $\delta = -1$ равны нулю, а следовательно в таком важном случае не подходит методика, предложенная в [1] для построения сплайна. Далее будет показано, как можно используя наличие параметра μ в (7), воспользоваться стандартным методом прогонки. Обозначим $\bar{t}_i$ - все касательные векторы, а r_i - данные точки, через которые должна пройти сплайновая кривая. Тогда на основании (7), можно записать:

$$\begin{cases} 2(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda)\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = 3(\bar{r}_2 - \bar{r}_1(1-\delta\lambda^2) - \delta\lambda^2\bar{r}_0) - \delta\lambda^2\bar{t}_0 \\ \delta\lambda^2\bar{t}_{i-1} + 2(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda)\bar{t}_i + \bar{t}_{i+1} = 3(\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i(1-\delta\lambda^2) - \delta\lambda^2\bar{r}_{i-1}) \quad i = 2..n-3 \\ \delta\lambda^2\bar{t}_{n-3} + 2(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda)\bar{t}_{n-2} = 3(\bar{r}_{n-1} - \bar{r}_{n-2}(1-\delta\lambda^2) - \delta\lambda^2\bar{r}_{n-3}) - \bar{t}_{n-1} \end{cases} \tag{9}$$

Известно, что метод прогонки устойчив при выполнении условия диагонального преобладания матрицы: $|B_i| \ge |A_i| + |C_i|$ [3]

В контексте системы (9):

$$\left|2(\frac{\mu}{4} + \delta\lambda^2 + \lambda)\right| \ge \left|\delta\lambda^2\right| + 1 \tag{10}$$

Решим это неравенство. В результате получим систему неравенств, определяющую μ:

$$\begin{cases} \mu \ge 2\left|\delta\lambda^2\right| - 4\delta\lambda^2 + 2 - 4\lambda \\ \mu \le -2\left|\delta\lambda^2\right| - 4\delta\lambda^2 - 2 - 4\lambda \end{cases}$$

Определим теперь границы μ ,например, при :

$$\lambda = 1, \delta = 1 : \begin{cases} \mu \ge -4 \\ \mu \le -12 \end{cases} \quad \text{или } \lambda = 1, \delta = -1 : \begin{cases} \mu \ge 4 \\ \mu \le -4 \end{cases} \tag{11}$$

Следовательно, теперь можно использовать стандартные формулы прогонки, но только если подбирать значения μ, используя(10). Стоит отметить, что условие (10) является достаточным условием, и для хорошо обусловленных систем прогонка может быть достаточно устойчивой даже без его соблюдения [3]. Однако при этом стоит иметь ввиду, что это условие также используется в качестве защиты от деления на нуль в формулах прогонки, поэтому при его несоблюдении даже для хорошо обусловленных систем может привести в некоторых случаях к неустойчивости. На основании проведенных исследований был создан программный модуль, который может при построении сплайна определять в автоматическом режиме какое значение δ выбрать. Также возможно подобрать такое μ, которое с одной стороны обеспечивает устойчивость вычислений, а с другой удовлетворяет запросам проектировщика. В заключении приведем примеры сплайнов для $\lambda = 1, \delta = 1$ при различных μ (Рис. 1.).

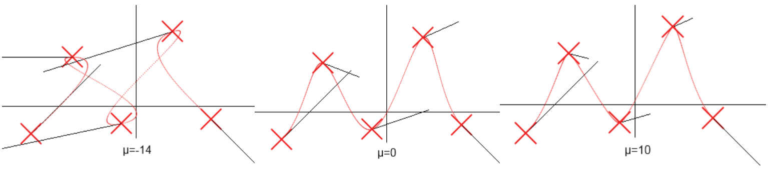

Рис. 1.

И для $\lambda = 1, \delta = -1$ (Рис. 2.).

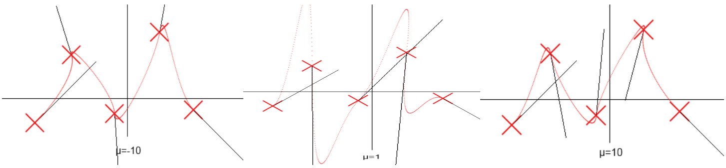

Рис. 2.

Выводы. Показано, что внесение небольших изменений в условия непрерывности кривизны позволяет ликвидировать такие нежелательные геометрические эффекты как, например, изломы или петли. Перспективой дальнейших исследований является проведение аналогичных исследований для параметрических пространственных кривых и поверхностей.

Литература

1.Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982. 304 С.

2. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия (6-е издание). - М.: Наука, 1974.

3. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. 432С.

ВПЛИВ ЗНАКУ КРИВИНИ НА ПОВЕДІНКУ ПАРАМЕТРИЧНИХ СПЛАЙНОВИХ КРИВИХ

В. А. Карпенко, А. Ю. Клещьов

Досліджується класичний підхід до побудови складеного параметричного сплайна, запропонований А. Фоксом і М. Праттом. При його практичної реалізації виникають небажані геометричні ефекти і проблеми з чисельною реалізацією. Запропонована модифікація дозволяє вирішити ці проблеми. Поліпшення вдалося досягти за рахунок використання «знака» кривизни і проведення параметричного аналізу. Отримана умова, дотримання якої забезпечує достатні умови сталих обчислюваннь . За результатами дослідження створено програмний модуль, використання якого дозволяє за рахунок підбору параметрів отримати бажаний сплайн.

INFLUENCE OF CURVATURES SIGN ON ACTIONS OF PARAMETRICALLY SPLINE CURVES

V. A. Karpenko, A. Y. Kleshchev

It’s investigated the classical approach suggested by I.D.Fox and M.J.Pratt for building of a complex parametric spline. During its practical realization undesirable geometric effects and problems with numerical realization arise. The proposed modification enables to solve these problems. The improvement was achieved by using a “sign” of curvature and conducting of parametric analysis. It was found a specific condition providing sufficient conditions for a stable calculation. According to the results of the investigation, a program module was created. Using this module it is possible to get the desired spline at the expense of parameters selection.