УДК 515.2

А. В. Кащенко, к.т.н.,
С. Н. Ковалёв, д.т.н.

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ ВИДОИЗМЕНЕНИЯ БИОФОРМЫ В ПРОЦЕССЕ ЕЁ РОСТА

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина

Показаны возможности геометрического моделирования дискретных каркасов поверхностей архитектурных форм на основе геометрической интерпретации основных факторов видоизменения биоформы в процессе её роста. В качестве математического аппарата для построения моделей принят метод конечных разностей.

Постановка проблемы.

Одним из перспективных направлений научных исследований в области архитектуры является архитектурная бионика, в основе которой лежит использование принципов образования форм живой природы для формообразования архитектурных объектов. В качестве посредника между природой и архитектурой выступает прикладная геометрия, которая позволяет геометрически формировать закономерности формообразования в природе и использовать их в архитектурном проектировании.

Образование поверхностей биоформ во многих случаях связано с видоизменением формы в процессе её роста. Каждый организм живой природы в процессе развития стремится к форме, которая способна наиболее полно удовлетворить его функциональные потребности в неразрывной связи с конкретными условиями внешней среды [1].

С геометрической точки зрения мы имеем дело с кинематическим способом образования поверхности с образующей переменной формы. При этом закономерности изменения формы образующей и перемещения её в пространстве настолько сложны, что не поддаются простой геометрической интерпретации.

С точки зрения дифференциальной геометрии образование такой поверхности можно рассматривать как двумерною задачу Коши, когда задано дифференциальное уравнение поверхности, учитывающее основные факторы, влияющие на развитие формы в процессе роста, и начальные условия, учитывающие исходные параметры будущей поверхности. В общем случае такая задача не имеет точного аналитического решения и решается приближенно численными методами, в частности, методом конечных разностей. Решение задачи можно упростить, если опустить этап составления дифференциального уравнения, а исходные данные сразу задавать в дискретном виде. Для компактности изложения материала ограничимся дискретными сетями с квадратной ячейкой в плане.

Анализ основных исследований.

Основные задачи и направления научных исследований на стыке областей архитектурной бионики и прикладной геометрии достаточно подробно изложены в [1]. В области дискретной прикладной геометрии известно множество научных публикаций, посвященных формированию дискретных каркасов поверхностей архитектурных форм, однако только работа [2] связана с архитектурной бионикой, где получены результаты решения задач формирования дискретных каркасов поверхностей биоформ с учётом упругого изгиба.

Основная часть.

Из литературы известны геометрические и статические трактовки различных конечно-разностных операторов. Эти трактовки можно учитывать как факторы, влияющие на изменение локальных параметров поверхности по мере роста моделируемой биоформы. Например, простейший конечно-разностный оператор

$$\begin{matrix} 1 & - & -1 \\ | & & | \\ -1 & - & 1 \end{matrix} \; + P_{i,j} = 0 \qquad (1)$$

задаёт отклонение $P_{i,j}$ по координатной оси пространственной четырёхугольной ячейки сети от плоскости;

оператор

$$\begin{matrix} & & 1 & & \\ & & | & & \\ 1 & - & -4 & - & 1 \\ & & | & & \\ & & 1 & & \end{matrix} \; + kP_{i,j} = 0 \qquad (2)$$

отвечает условию формирования уравновешенной сети под действием внешней нагрузки $P_{i,j}$, распределённой между узлами сети [3];

оператор

$$\begin{matrix} -1 & - & 2 & - & -1 \\ | & & | & & | \\ 2 & - & -4 & - & 2 \\ | & & | & & | \\ -1 & - & 2 & - & -1 \end{matrix} \; + P_{i,j} = 0 \qquad (3)$$

отражает стремление ячеек сети к уплощению [4];

оператор

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & -4 & & \\ 1 & -4 & 12 & -4 & 1 \\ & & -4 & & \\ & & 1 & & \end{array} + kP_{i,j}=0 \qquad (4)$$

отвечает условиям упругого изгиба сети[5];

оператор

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{array} + kP_{i,j}=0 \qquad (5)$$

моделирует стремление сети к минимизации как упругого изгиба, так и кручения и т.д.

Существует непосредственная связь между формированием дискретных сетей методом конечных разностей и моделированием тех же сетей при помощи аппарата двойных числовых последовательностей [3].

Если сеть моделируется двойной бесконечной числовой последовательностью, то в ряде случаев можно перейти от реккурентной зависимости, которая повторяет конечно-разностный оператор к замкнутой форме, а затем и к аналитическому описанию поверхности, заменив дискретные параметры числовой последовательности непрерывными.

Если параметр $P_{i,j}$ разностного оператора считать неизвестным, то появляется возможность прогнозировать поведение сети по мере её роста, задавая координаты отдельных узлов сети, кроме начальных условий.

Рассмотрим подробнее простейший разностный оператор (1) и начальные условия в виде двух рядов точек

$$Z_{i,0} = f_1(i) \qquad (6)$$

$$Z_{0,j} = f_2(j) \qquad (7)$$

на квадратной в плане сетке.

Оператор (1) можно представить в виде двойной числовой последовательности, которая описывается реккурентной формулой:

$$Z_{i,j} = Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} - Z_{i-1,j-1} + P_{i,j} \qquad (8)$$

где i, j нумерация членов числовой последовательности с начальными условиями (6) и (7).

Заданные начальные условия позволяют перейти к замкнутой форме представления числовой последовательности:

$$Z_{m,n} = -Z_{00} + Z_{m0} + Z_{on} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{i,j} \qquad (9)$$

где m и n - номер вычисляемого члена,
Z_{oo}, Z_{mo}, Z_{on} - аппликаты узлов начальных условий.

При заданном изменении $P_{i,j} = f(i,j)$ можно от дискретной сети перейти к аналитическому уравнению поверхности.

Например, при $P_{i,j} = P$

$$Z_{m,n} = -Z_{oo} + Z_{m,o} + Z_{o,n} + pmn\,, \qquad (10)$$

последовательность (9) принимает вид:

$$Z_{m,n} = -Z_{oo} + Z_{m,o} + Z_{o,n} + pmn.$$

При замене в (10) дискретных параметров m и n непрерывными x и y получим уравнение поверхности:

$$Z = -Z_{oo} + f_1(x) + f_2(y) + pxy, \qquad (11)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ начальные условия (6) и (7) в виде непрерывных кривых.

Если $P_{i,j} = 0,$ получаем уравнение поверхности переноса:

$$Z = -Z_{oo} + f_1(x) + f_2(y) \text{ и т.д.} \qquad (12)$$

Пример 1 (Рис.1).

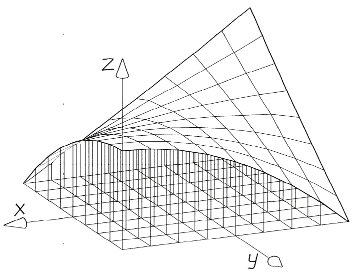

Рис.1

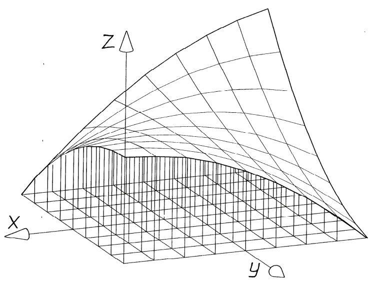

Рис. 2

Задан разностный оператор (1) и начальные условия в виде двух рядов точек с равномерным шагом на параболах:

$$Z = 4 - 0{,}0625x^2;\; y = 0; \qquad (13)$$

$$Z = 4 - 0{,}0625y^2;\; x = 0; \qquad (14)$$

Задана также функция изменения параметра P_{ij}:

$$P_{ij} = P_0(i + j) \qquad (15)$$

Уравнение поверхности получаем при подстановке (15) в (9) и последующей замене дискретных параметров непрерывными:

$$Z = 4 - 0{,}0625(x^2 + y^2) + \frac{P_0 \cdot x \cdot y(x + y + z)}{2}; \tag{16}$$

Зная уравнение поверхности, можно задать один из узлов сети, например, $z_{88} = 6$ и из (16) определить параметр p_0, который обеспечит прохождение поверхности через заданную точку: $p = 0{,}0174$.

На рис.1 показан дискретный точечный каркас такой поверхности.

На рис. 2 показан точечный каркас аналогичной поверхности при другом распределении параметры P_{ij} между узлами:

$$P_{i,j} = aj,$$

Где а – постоянная величина.

Уравнение поверхности имеет вид:

$$Z = 4 - 0{,}0625(x \quad + y^2) + \frac{axy(y+1)}{2} \tag{17}$$

Рассмотрим разностный оператор (2).

Дискретную сеть можно представить как геометрическую модель двойной числовой последовательности с реккурентной формулой (6)

$$\begin{aligned} Z_{i,j} &= -Z_{i-2,j-2} - Z_{i-2,j} - Z_{i,j-2} + 2(Z_{i-2,j-1} + Z_{i-1,j-2} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1}) - \\ &- 4Z_{i-1,j-1} + P_{i,j} \end{aligned} \tag{18}$$

и начальными условиями в виде двух пар рядов узлов сети: $Z_{i,o}; Z_{i,1}; Z_{o,j}; Z_{1,j}$, где i и j принимают значения ряда целых чисел.

Замкнутая форма представления этой последовательности, которая позволяет вычислять произвольный член последовательности без предварительного определения предыдущих членов, имеет вид:

$$\begin{aligned} Z_{m,n} &= -(m-1)(n-1)Z_{oo} + n(m-1)Z_{o1} + m(n-1)Z_{10} - mnZ_{11} - \\ &- (n-1)Z_{m,o} - m-1)Z_{0,n} + nZ_{m,1} + mZ_{1,n} + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{n} P_{i,j}(m+1-i)(n+1-j), \end{aligned} \tag{19}$$

где m и n – нумерация вычисляемого члена последовательности.

Если $P_{i,j} = P$ – постоянная величина, то последний член в формуле (19) принимает вид:

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{n} P_{i,j}(m+1-i)(n+1-j) = \frac{Pmn(m-1)(n-1)}{4} \tag{20}$$

Пример 2.

Задана квадратная в плане сетка 8х8 ячеек и начальные условия в виде узлов на двух парах одинаковых по форме парабол:

$$\left.\begin{aligned} x = 0; z = 2y - 0{,}25y^2 \\ x = 1; z = 2y - 0{,}25y^2 + 1{,}75 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} y = 0; z = 2x - 0{,}25x^2 \\ y = 1; z = 2x - 0{,}25x^2 + 1{,}75 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

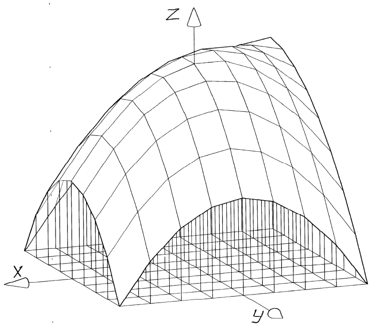

Рис. 3

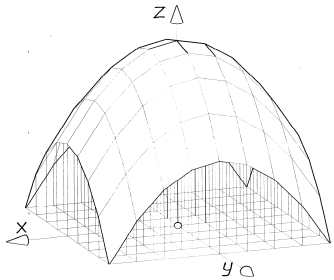

Рис. 4

На рис.3 показан каркас поверхности при $p = 0{,}01$

На рис. 4 показан каркас поверхности при тех же начальных условиях и $p = 0.$ В данном случае все узлы сети принадлежат параболоиду вращения.

Выводы.

На основе метода конечных разностей предложен способ дискретного моделирования биоформ с учётом их видоизменения в процессе развития. Основные факторы, влияющие на изменение формы учитываются при выборе разностного оператора.

Литература

1. *Михайленко В.Е., Кащенко А.В.* Природа - геометрия-архитектура.– 2-е изд. – К: Будівельник, 1988.
2. *Кащенко А.В.* Флрмообразование пространственных покрытий архитектурно-строительных объектов на основе геометрического моделирования природных структур. дис. канд. техн. наук: 05.01.01. – К: КИСИ, 1985.– 120 с.
3. *Ковальов С.М.* Прикладна геометрія та інженерна графіка (спеціальні розділи)/ С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустюльга, В.Є. Михайленко, І.Н. Бурчак. Луцьк:ЛДТУ, 2006.– с.126-176.
4. *Ковалёв С.Н.* Уплощение ячеек дискретной сети./ С.Н. Коваёв, Н.А. Маркелов, И.В. Сафронеев // прикл. геом. и инж. графика: межведомственный н.т. сборник.- К.: «Будівельник», 1989.– вып.47.– с.18-20.
5. *Ковалёв С.Н.* Дискретные геометрические модели упругих сетей //Прикл. геом. и инж. графика: межведомственный н.т. сборник.- К.: «Будівельник», 1981.– вып.32.

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИНЦИПІВ ВИДОЗМІНЮВАННЯ БІОФОРМИ В ПРОЦЕСІ ЇЇ ЗРОСТАННЯ.

О. В. Кащенко, С. М. Ковальов

Показано можливості геометричного моделювання дискретних каркасів поверхонь архітектурних форм на основі геометричної інтерпретації основних чинників видозмінювання біоформи у процесі її зростання. Як математичний апарат побудови геометричних моделей біоформ прийнято метод скінчених різниць.

DISCRETE MODELING PRINCIPLES BIOFORM MUTATED DURING ITS GROWTH.

A. V. Kashchenko, S. N. Kovalev

The possibilities of geometric modeling of discrete frames surfaces of architectural forms based on the geometric interpretation of the main factors in the process of modifying bioform growth. As a mathematical tool for modeling adopted the method of finite differences.