УДК 515.2 **Є. В. Конопацький**

БІКУТОВА ТА БІРАДІАЛЬНА ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ В ПЛОЩИНІ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Донбаська національна академія будівництва і архітектури, Україна

В статті запропоновано принципово новий спосіб конструювання кривих в площині загального положення за допомогою бікутової та бірадіальної параметризацій у точковому численні Балюби-Найдиша на прикладі замкнених кривих з двома осями симетрії.

Постановка проблеми. Незважаючи на універсальність і простоту використання декартової системи координат, розроблено багато інших систем, застосування яких виявляється більш зручними для вирішення тієї чи іншої задачі. В загальному випадку точка, яка належить площині (2-вимірному простору), має два степеня свободи і координується у різних системах координат. Найбільш простою з криволінійних системою координат є класична полярна система координат, яка характеризує точку відносно єдиного центру також двома координатами: полярним радіусом ρ та полярним кутом φ, де $\rho-$відстань від точки до полюса, а $\varphi-$кутова міра відносно полярної вісі. Координування забезпечується двома сімействами: метричним сімейством концентричних кіл $\rho = const$ та орієнтованим сімейством радіальних прямих $\varphi = const$, які проходять через центр-полюс. Ці сімейства взаємно ортогональні, що дозволяє визначити класичну полярну систему координат, як криволінійну ортогональну систему координат.

В точковому численні Балюби-Найдиша [1, 2] вихідними даними є симплекс $n-$вимірного простору. Однією з особливостей точкового числення Балюби-Найдиша є те, що точку простору визначають не координати, а параметри. Кількість параметру залежить від розмірності простору. Наприклад, точка, що належить площині (2-вимірний простір), визначається двома функціями: $p(t)$ і $q(t)$, які однозначно визначають точку в симплексі цього простору і є, по суті, відношенням відповідних орієнтованих площин. Функції $p(t)$ і $q(t)$ залежать від геометричної схеми конструювання точкових різноманіть в симплексі площини.

Однією з переваг точкового числення Балюби-Найдиша, як математичного апарату інженера, є можливість конструювання кривих ліній за заданими на практиці умовами і з наперед заданими властивостями. Так однією з практичних задач є задача отримання, як в горизонтальній площині, так і в площині загального положення, замкнених кривих з двома осями симетрії.

При конструюванні поверхонь оболонок технічних форм необхідно мати плоскі криві, які мають осі симетрії (подібні до еліпса). Для конструювання таких кривих доцільно використати бікутову, або бірадіальну параметризацію в площині. Це дозволяє визначити точку 2-вимірного простору за допомогою двох центрів (фокусів) і двох параметрів: два полярних кута φ і t для бікутової параметризації, або два полярних радіуси ρ і τ для бірадіальної параметризації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Бікутова або бірадіальна параметризації площини беруть за основу дві точки площини, які будуть фокусами майбутньої кривої. Визначення багатофокусних кривих було розглянуто досить детально, наприклад, в [3, 4]. У всіх цих роботах було збільшено лише кількість фокусів, але точка простору визначалась, як в класичній системі координат, двома координатами: полярним радіусом ρ та полярним кутом φ. Запропонований спосіб конструювання кривих за допомогою бікутової та бірадіальної параметризацій розглядається вперше.

Формулювання цілей і завдання статті. Розробити теоретичні основи конструювання замкнених кривих в площині загального положення за допомогою бікутової та бірадіальної параметризації у точковому численні Балюби-Найдиша.

Основна частина. Розглянемо геометричну схему конструювання кривих з двома осями симетрії (рис. 1). Наочно з рисунка 1 видно, що при значеннях параметрів $\pm t, \pm\varphi$ в кутовій параметризації автоматично забезпечується наявність осі F_1F, а при заміні значень кутів φ і t будемо мати вісь симетрії CB. Для радіальної параметризації (полярні радіуси ρ і τ) також характерна наявність осей симетрії, як представлено на рисунку 1.

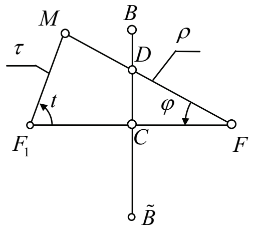

Рис. 1. Геометрична схема конструювання кривих з двома осями симетрії

Бікутова параметризація площини

Визначимо бікутову параметризацію в прямокутному симплексі CFB. Тоді симетричні точки (фокуси кривої) мають наступні точкові рівняння:

$$F_1 = 2C - F; \;\; \tilde{B} = 2C - B. \tag{1}$$

Позначимо:

$$|CF| = \sum\nolimits_{FF}^{C} = c, \; |CB| = \sum\nolimits_{BB}^{C} = b. \tag{2}$$

Далі визначаємо рівняння точки D:

$$CD = c \cdot tg\varphi \to D = (B - C)\frac{c \cdot tg\varphi}{b} + C. \tag{3}$$

Аналогічним чином визначимо рівняння поточної точки M:

$$FD = \frac{c}{\cos\varphi};$$
$$M = (D - F)\frac{\rho\cos\varphi}{c} + F = \left[(B - C)\frac{c \cdot tg\varphi}{b} - (F - C)\right]\frac{\rho\cos\varphi}{c} + F. \tag{4}$$

За теоремою синусів, маємо:

$$\frac{2c}{\sin(\varphi + t)} = \frac{\rho}{\sin t} = \frac{\tau}{\sin\varphi} = 2r;$$
$$\rho = \frac{2c\sin t}{\sin(\varphi + t)}; \tau = \frac{2c\sin\varphi}{\sin(\varphi + t)}. \tag{5}$$

Після підстановки одержаного значення ρ в рівняння (4), отримаємо:

$$M = \left[(B - C)\frac{c \cdot tg\varphi}{b} - (F - C)\right]\frac{2\sin t\cos\varphi}{\sin(\varphi + t)} + F. \tag{6}$$

Або, в стандартному вигляді:

$$M = (F - C)(1 - \frac{2\sin t\cos\varphi}{\sin(\varphi + t)}) + (B - C)\frac{2c\sin\varphi\sin t}{b\sin(\varphi + t)} + C. \tag{7}$$

Через прилеглі кути, маємо:

$$M = (F - C)(1 - \frac{2\sin t\cos\varphi}{\sin(\varphi + t)}) + (B - C)\frac{2c\sin\varphi\sin t}{b\sin(\varphi + t)} + C. \tag{8}$$

Після спрощень отримаємо:

$$M = (F - C)\frac{\sin(\varphi - t)}{\sin(\varphi + t)} + (B - C)\frac{2c\sin\varphi\sin t}{b\sin(\varphi + t)} + C. \tag{9}$$

Останнє точкове рівняння визначає бікутову параметризацію площини заданої прямокутним трикутником CFB з прямим кутом C і катетами $|CF| = c, |CB| = b$.

Зв'язок нормальної і бікутової параметризації площини визначається співвідношеннями:

$$p = \frac{\sin(\varphi - t)}{\sin(\varphi + t)} = \frac{tg\varphi - tgt}{tg\varphi + tgt};$$
$$q = \frac{2c\sin\varphi\sin t}{b\sin(\varphi + t)} = \frac{2c \cdot tg\varphi}{b(tg\varphi + tgt)}. \tag{10}$$

Твердження. В прямокутному симплексі BCF, де $|CF| = c, |CB| = b$ крива з двома осями CF, CB симетрії буде мати точкове рівняння в кутовій параметризації:

$$M = (F - C)\frac{\sin(\varphi - t)}{\sin(\varphi + t)} + (B - C)\frac{2c\sin\varphi\sin t}{b\sin(\varphi + t)} + C =$$
$$= (F - C)\frac{tg\varphi - tgt}{tg\varphi + tgt} + (B - C)\frac{2c \cdot tg\varphi}{b(tg\varphi + tgt)} + C. \tag{11}$$

Якщо $\varphi = 0, t \neq 0$, то $p = -1, q = 0$ і ми маємо точку $F_1 = 2C - F$. При $t = 0, \varphi \neq 0$ маємо точку F. При $t = \varphi = 0$ маємо невизначеність $p = q = \dfrac{0}{0}$.

Якщо $\varphi = \varphi(t)$, то будемо мати криву в кутовій параметризації. Так наприклад, приймаючи $\varphi = \pi - t - \alpha$, маємо коло з поточною точкою M з якого видно відрізок FF_1 під постійним кутом α. Точкове рівняння такого кола має вигляд:

$$M = (F - C)\frac{\sin(2t + \alpha)}{\sin\alpha} + (B - C)\frac{2c\sin(t + \alpha)\sin t}{b\sin\alpha} + C. \qquad (12)$$

Змінюючи кут α будемо мати пучок кіл площини, що проходять через точки F, F_1.

Бірадіальна параметризація площини

Повернемось до співвідношень теореми синусів:

$$\begin{gathered}\frac{2c}{\sin(\varphi + t)} = \frac{\rho}{\sin t} = \frac{\tau}{\sin\varphi} = 2r;\\ \sin(\varphi + t) = \frac{c}{r}; \sin t = \frac{\rho}{2r}; \sin\varphi = \frac{\tau}{2r}.\end{gathered} \qquad (13)$$

За теоремою косинусів маємо:

$$\cos\varphi = \frac{4c^2 + \rho^2 - \tau^2}{4c\rho}; \cos t = \frac{4c^2 - \rho^2 + \tau^2}{4c\tau}. \qquad (14)$$

Далі після підстановок і певних перетворень, визначимо:

$$\begin{gathered}p = \frac{\tau^2 - \rho^2}{4c^2};\\ q = \frac{\sqrt{(2c + \rho + \tau)(2c + \rho - \tau)(2c - \rho + \tau)(\rho + \tau - 2c)}}{4bc}.\end{gathered} \qquad (15)$$

Твердження. В прямокутному симплексі BCF, де $|CF| = c, |CB| = b$ крива з двома осями CF, CB симетрії буде мати точкове рівняння в радіальній параметризації:

$$\begin{gathered}M = (F - C)\frac{\tau^2 - \rho^2}{4c^2} +\\ +(B - C)\frac{\sqrt{(2c + \rho + \tau)(2c + \rho - \tau)(2c - \rho + \tau)(\rho + \tau - 2c)}}{4bc} + C.\end{gathered} \qquad (16)$$

Якщо $\rho = \rho(\tau)$, то будемо мати криву в радіальній параметризації. Так, наприклад, якщо $\rho = 2a - \tau$ будемо мати еліпс з полуосями a, b; при $\rho = 2a + \tau$ – гіперболу, а при $\rho = \dfrac{a}{\tau}$ – овали Касіні.

Висновки. В статті представлені принципово нові (бікутова та бірадіальна) параметризації площини і розроблені теоретичні основи конструювання кривих в площині загального положення за допомогою цих параметризацій у точковому численні Балюби-Найдиша. Запропоновані параметризації дозволяють ефективно конструювати геометричні форми з двома взаємно перпендикулярними осями симетрії. Також наведені приклади конструювання замкнених кривих з двома осями симетрії в площині загального положення.

Література

1. *Балюба І.Г.* Основи математичного апарату точкового числення / Балюба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П. Праці // Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 29. – Мелітополь: ТДАТА, 2005.– С.22-30.

2. Точечное исчисление – математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм. [Балюба И.Г., Полищук В.И., Горягин Б.Ф., Малютина Т.П.] // Материалы Международной научной конференции «Моделирование – 2008», 14-16 мая 2008 р., г. Киев, Том 2. – С.286-290.

3. *Ситник С.М.* Определения многофокусных кривых / Ситник. С.М., Тимашов А.С. // Труды Всер. научн. конф. «Моделирование и краевые задачи». Ч.2. г. Самара, 2004. – С. 246-249.

4. *Ракчеева Т.А.* Приближение кривых многофокусными лемнискатами / Ракчеева Т.А. // Человеко-машинные системы и анализ данных: Сб. науч. трудов. Отв. ред. И.А. Овсеевич. М.: Наука, 1992. – С. 93–110.

БИУГЛОВАЯ И БИРАДИАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ В ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Е. В. Конопацкий

В статье предложен принципиально новый способ конструирования кривых в плоскости общего положения с помощью биугловой и бирадиальной параметризации в точечном исчислении Балюбы-Найдыша на примере замкнутых кривых с двумя осями симметрии.

BIANGULAR AND BIRADIAL PARAMETRIZATION IN THE GENERAL PROVISIONS PLANE

E. V. Konopatsky

In article essentially new way of construction the curves in the general provisions plane with the help biangular and biradial parameterization is offered in dot analysis of Baljuba-Najdysh on an example of the closed curves with two axes of symmetry.