УДК 514.18

Я. П. Легета,
О. В. Шоман, д.т.н.

ОПИС ІНТЕГРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕПІГІПОТРОХОЇДНИХ КОНТУРІВ

ДВНЗ "Ужгородський національний університет", Україна
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут", Україна

Розроблено спосіб обчислення площі між двома взаємоспряженими епігіпотрохоїдами. Наведено результати визначення площ фігур, обмежених епігіпотрохоїдами. Розглянуто переваги використання запропонованого способу.

Постановка проблеми. Продуктивність роторно-планетарних машин (двигунів або гідронасосів) визначається об'ємом простору між поверхнями ротора та корпуса. Причому, цей об'єм змінюється у часі завдяки переміщенню ротора за допомогою планетарного механізму. У випадку циліндричного оформлення гідравлічної машини її продуктивність визначатиметься площею фігури, яка розташована між контурами профілів ротора і корпуса. Результати обчислень певною мірою залежать від ефективності того чи іншого способу визначення характеристик геометричних елементів механізму, тому розробка і удосконалення способів геометричного розрахунку залишаються актуальними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах В. С. Беніовича, Г. Д. Апазиді, Б. Н. Бірюкова, Р. М. Сухомлінова та інших наведено різні способи описів профілів роторів і корпусів роторно-планетарних машин [1, 2, 5]. Однак проведені дослідження не дозволили створити інформаційне забезпечення геометричного моделювання різновидів формоутворення деталей обкаткою, утворених за допомогою роторно-планетарного механізму. Крім того, не вдалося знайти результати, де б розрахунки роторно-планетарних машин здійснювалися з урахуванням комбінованих кривих у вигляді фрагментів гіпотрохоїди та епітрохоїди.

Кроком до дослідження геометрії робочих профілів роторно-планетарних машин були роботи Л. М. Куценка, та його учнів, де визначалися обвідні сім'ї кривих із залученням процесора Maple [4]. При цьому ще не дослідженим виявилося створення ефективних алгоритмів обчислення продуктивності зазначених машин. Звідси актуальною є розробка алгоритмів визначення інтегральних характеристик між контурними кривими корпуса і ротора, утвореними комбінованими кривими у вигляді фрагментів гіпотрохоїди та епітрохоїди як попарно спряжених кривих. У згаданих вище дослідженнях до інтегральних характеристик віднесено поняття площі, обмеженої контурними кривими.

Формулювання цілей та завдання статті. Розробити спосіб обчислення площі між двома взаємоспряженими епігіпотрохоїдами та проаналізувати результати обчислень.

Основна частина. У роботі [4] було знайдено параметричні рівняння епігіпотрохоїдних кривих, тобто профілів ротора і корпуса. Ці рівняння дозволяють обчислити площу між зазначеними кривими (для фіксованого значення кута обкатки θ), що, в свою чергу, надає можливість розрахувати продуктивність машини шляхом обчислення площі між епітрохоїдними профілями, які визначають контури ротора і корпуса.

Позначимо рівняння епігіпотрохоїдної кривої як $x = x_{EG}(t)$; $y = y_{EG}(t)$, де $0 \le t \le 2\pi$. Тоді площу фігури, обмежену цією замкнутою кривою, можна обчислити за відомою з інтегрального числення формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x_{EG}(t) y'_{EG}(t) - y_{EG}(t)\, x'_{EG}(t) \right) dt . \qquad (1)$$

Для обчислення інтеграла (1) в аналітичному вигляді використано пакет Maple. В результаті програма для обчислення площі між двома епігіпотрохоїдами має вигляд

```
xE := (R+1/2)*cos(t)-1/2*cos(2*(R+1/2)*t):
yE := (R+1/2)*sin(t)-1/2*sin(2*(R+1/2)*t):
xG := (R-1/2)*cos(t)+1/2*cos(2*(R-1/2)*t):
 G := (R-1/2)*sin(t)-1/2*sin(2*(R-1/2)*t):
xEG := 0.5*(xE + xG + sum('(-1)^(k-1)*
xG - xE)*abs(t-k*Pi/R)/(t-k*Pi/R)', 'k'=1..2*R-1));
yEG := 0.5*(yE + yG + sum('(-1)^(k-1)*
yG - yE)*abs(t-k*Pi/R)/(t-k*Pi/R)', 'k'=1..2*R-1));
dxEG := diff(xEG,t);
yEG := diff(yEG,t);
Sk := int(xEG*dyEG - yEG*dxEG, t=0..2*Pi)/2;
```

За допомогою цієї програми можна одержати аналітичну формулу для обчислення площі фігури на площині, обмежену відповідною епігіпотрохоїдою для обраного значення радіуса *R*. Ця формула є занадто громіздкою.

В результаті обчислень інтеграла (1) для певних значень радіуса *R* ділильного кола були одержані значення площі *S*, обмеженої епігіпотрохоїдою (значення *R* і *S* наведені в умовних одиницях):

Таблиця

R	1	2	3	4	5
S	4,712388980	14,13716694	29,84513021	51,83627880	80,11061265

На основі одержаних вище значень обчислено площі фігур між контурами ротора і корпуса, що дозволить на практиці оцінити робочі об'єми обраного перерізу роторно-планетарної машини.

На рис. 1–4 наведено обчислені величини площі (тут і далі в умовних одиницях) фігур між епігіпотрохоїдами для певних значень *R*.

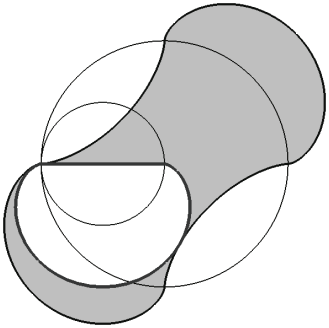

Рис. 1. Величина площі $S = 9{,}424777960$ між епігіпотрохоїдами для $R = 2$

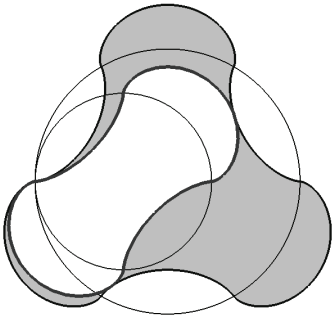

Рис. 2. Величина площі $S = 15{,}70796327$ між епігіпотрохоїдами для $R = 3$

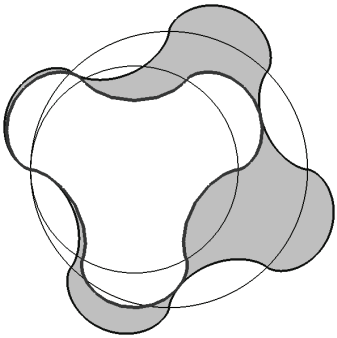

Рис. 3. Величина площі $S = 21{,}99114859$ між епігіпотрохоїдами для $R = 4$

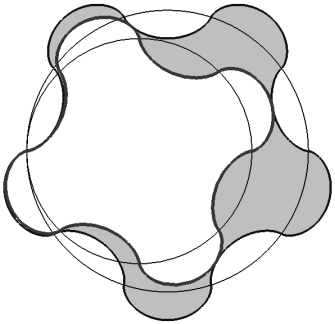

Рис. 4. Величина площі $S = 28{,}27433385$ між епігіпотрохоїдами для $R = 5$

Якщо побудувати графік зміни площ між епігіпотрохоїдами залежно від R, то він матиме вигляд прямої лінії (рис. 5).

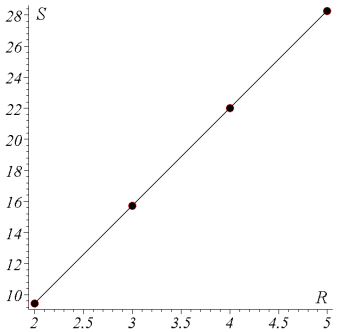

Рис. 5. Графік зміни площ між епігіпотрохоїдами залежно від R

Рівняння прямої з графіка у неявному вигляді має вигляд

$$(S - 15{,}7)/(28{,}3 - 15{,}7) = (R - 3)\cdot 0{,}5; \quad (2)$$

Або

$$S = -3{,}14099 + 6{,}28R \quad (3)$$

Для запису виразу (3) пропонується співвідношення

$$S = \pi(2R - 1) \quad (4)$$

Формула (4) дозволяє без інтегрування визначати площі між епігіпотрохоїдами для великих значень R. На рис. 6 і 7 наведено відповідні приклади. Цим вдалося уникнути великого часу для інтегрування, що є важливим при розробці систем автоматизованого проектування зазначених машин.

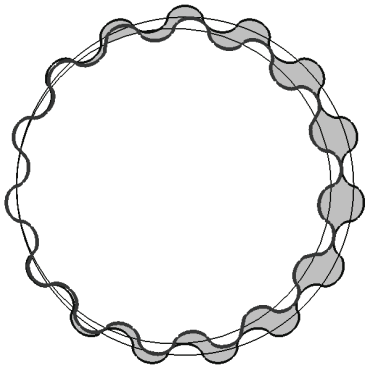

Рис.6. Величина площі S = 91,10618697 між епігіпотрохоїдами для R = 15

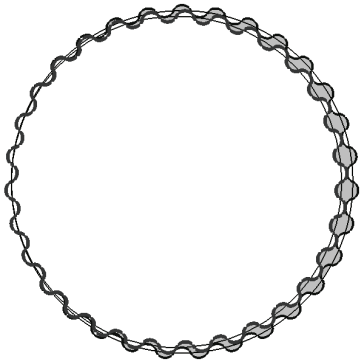

Рис. 7. Величина площі S = 191,6371519 між епігіпотрохоїдами для R = 31

Отже, завдяки одержаним у явному вигляді рівнянням епігіпотрохоїдних кривих було досліджено їх характеристики: обчислення площ, обмежених епігіпотрохоїдою і площ між епігіпотрохоїдами, які моделюють робочі профілі ротора і корпуса.

Висновки. Розроблено спосіб обчислення площі між двома взаємоспряженими епігіпотрохоїдами. Показано, що графік зміни площ між епігіпотрохоїдами залежно від радіуса R ділильного кола має вигляд прямої лінії; це дозволяє для великих значень R без інтегрування обчислювати площі між епігіпотрохоїдами.

Література

1. *Бениович В.С.* Ротопоршневые двигатели / *В. С. Бениович, Г. Д. Апазиди, А. М. Бойко.* – М.: Машиностроение, 1968. – 152 с.

2. *Бирюков Б.Н.* Роторно-поршневые гидравлические машины / *Б. Н. Бирюков*. – М.: Машиностроение, 1972. – 152 с.

3. *Куценко Л.М., Рева В.Г.* Визначення об'ємних витрат роторно-планетарних трохоїдних гідромашин // Сборник научных трудов Киевского национального университета технологий и дизайна. Спецвыпуск. – К.: Випол, 2004. – С. 170.

4. *Лінчевський Є.А.* Геометричне моделювання епігіпотрохоїдних профілів роторно-планетарних машин. – Автореф. дис... канд. техн. наук. – К., 2010. – 23 с.

5. *Сухомлинов Р.М.* Трохоидные роторные компрессоры. – Х.: ХГУ – Вища школа, 1975. – 152 с.

6. *Сухомлинов Р.М., Моисеенко Л.А., Гордиенко И.Г.* Расчет рабочих процессов трохоидных роторно-поршневых компрессоров // Вестник Харьковского политехнического института. Сер. Машиностроение. – 1974. – № 96. – С. 45–49.

ОПИСАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭПИГИПОТРОХОИДНЫХ КОНТУРОВ

Я. П. Легета, О. В. Шоман

Разработан способ вычисления площади между двумя взаимно сопряженными эпигипотрохоидами. Приведены результаты определения площадей фигур, ограниченных эпигипотрохоидами. Рассмотрены преимущества использования предложенного способа.

THE DESCRIPTION OF INTEGRAL CHARACTERISTICS EPIGIPOTROHOIDS CONTOURING

Iaroslav P. Legeta, Olga V. Shoman

The method of calculation of area is worked out between two mutually conjugate epihipotrohoyids. Results over of determination of areas of figures limited by epihipotrohoyids are shown. Advantages of the use of the offered method are considered.