УДК 514. 18

**С. І. Літніцький**,
**Є. В. Пугачов**, д.т.н.

# ПОРІВНЯННЯ СПОСОБІВ ВИЗНАЧЕННЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГУ ГАУССОВОЇ КРИВИНИ

*Національний університет водного господарства та природокористування, Україна*

***Виконано порівняння способів визначення дискретного аналогу Гауссової кривини для відсіків дискретно представлених поверхонь на прямокутному плані з співставленням результатів зі значеннями, отриманими для континуально заданих поверхонь. Наведені переваги і недоліки способів визначення дискретного аналогу Гауссової кривини. Запропонований метод обчислення значень дискретного аналогу Гауссової кривини для крайніх і кутових точок відсіку поверхні. Показано поверхні відхилення поверхонь дискретних аналогів Гауссової кривини, обчислених різними способами, від реальних значень.***

**Постановка проблеми**. Для точок континуально заданих поверхонь можна отримати значення диференціальних характеристик, зокрема Гауссової кривини. На практиці часто доводиться мати справу з ДПП, для яких це неможливо, оскільки вони не є неперервними, що унеможливлює використання похідних. Тому були розроблені алгоритми, за допомогою яких можна отримати дискретні аналоги диференціальних характеристик ДПП. Всі вони дають досить грубе наближення до реальних значень, тому є потреба у їхньому порівнянні для виявлення серед них найбільш ефективного.

**Формулювання цілей та завдання статті.** В роботі поставлено мету – проаналізувати способи визначення дискретного аналогу Гауссової кривини для різних видів ДПП з різним кроком точок просторового каркасу і порівняти результати зі значеннями, отриманими для поверхонь, заданих континуально.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Наскільки відомо авторам з літературних джерел, це питання в такому аспекті лише частково розглядалося в роботі [3], де удосконалено один із методів і продемонстровано його точність.

**Основна частина.** Порівняння було виконано для трьох різних поверхонь: параболоїда обертання, поверхні обертання гіперболи ($z = b/x$) навколо осі $z$ і поверхні переносу синусоїди по синусоїді.

В першому методі дискретний аналог Гауссової кривини обчислюється за формулою

$$C1 = 2\pi - \sum \alpha_i \,, \tag{1}$$

де $\alpha_i$ – кути, які утворюють суміжні ребра, інцидентні досліджуваній точці.

У роботі [1] наведені три типи точок:

- еліптичні точки: $\sum \alpha_i < 2\pi$ (Гауссова кривина додатня) ;

- параболічні точки: $\sum \alpha_i = 2\pi$ (Гауссова кривина дорівнює нулю і точка знаходиться на плоскій ділянці);

- гіперболічні точки: $\sum \alpha_i > 2\pi$ (Гауссова кривина від’ємна).

Цей метод добре відображає характер поверхонь, але отримані значення є далекими від реальних значень (рис. 3, б, поверхня відхилень від реальних значень кривини), тому на практиці краще використовувати два наступні методи, які по суті є його удосконаленням.

В одному з наведених у роботі [3] методів дискретний аналог Гауссової кривини обчислюється за формулою

$$C2 = A_{Barycenter} / C1, \tag{2}$$

де $A_{Barycenter}$ – площа барицентричної комірки, яка утворюється навколо точки, тобто – одна третя суми площ усіх трикутників, інцидентних досліджуваній вершині (рис. 1, а).

Цей метод на практиці виявися ефективним. Відхилення від реальних значень практично було відсутнє на ділянках з малим значенням кривини і поступово зростало у залежності від зростання кривини (рис. 3, в, поверхня відхилень від реальних значень кривини). Із збільшенням кроку точок просторового каркасу у два рази відхилення у значній мірі зросло лише на ділянках з великим значенням кривини.

В іншому методі, наведеному у роботі [3], дискретний аналог кривини обчислюється за формулою

$$C3 = A_{Voronoi} / C1, \tag{3}$$

де $A_{Voronoi}$ – площа комірки Вороного [2], яка утворюється навколо досліджуваної точки (рис. 1, б).

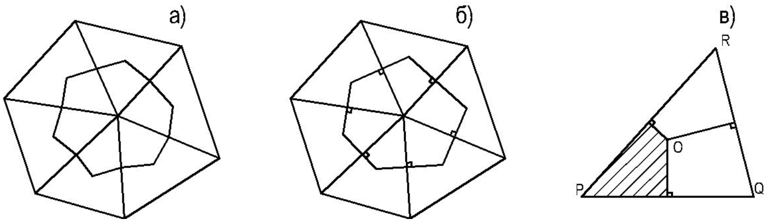


Рис. 1. До визначення дискретних аналогів Гауссової кривини: а – випадок з Барицентричною коміркою; б – випадок з коміркою Вороного; в – до обчислення площі комірки Вороного

Площа комірки Вороного обчислюється за формулою

$$A_{Voronoi} = \frac{1}{8} \sum \left( |PR|^2 \cot < Q + |PQ|^2 \cot < R \right), \tag{4}$$

де $P, R, Q$ показані на рис. 1, в.

Ця формула перестає працювати, якщо один із трикутників, інцидентних досліджуваній вершині, містить тупий кут. Тому в [3] запропонована наступна формула:

$$C3 = A_{Mixed} / C1, \tag{5}$$

де $A_{Mixed}$ – площа комірки , яка утворюється навколо досліджуваної точки, обчислена комбінованим методом:

- якщо трикутник, інцидентний досліджуваній вершині, не містить тупих кутів, то до $A_{Mixed}$ додається площа, обчислена за формулою (4);

- якщо трикутник при досліджуваній вершині має тупий кут, то до $A_{Mixed}$ додається одна друга площі даного трикутника;

- в інших випадках до $A_{Mixed}$ додається одна четверта площі трикутника.

Цей метод також на практиці виявися ефективним. Результати для всіх поверхонь були аналогічними результатам, отриманим у випадку обчислення площі барицентричної комірки, проте у більшості випадків менш точними, особливо на ділянках з від'ємним значенням Гауссової кривини (рис. 3, г, поверхня відхилень від реальних значень кривини). Тому цей метод бажано застосовувати тоді, коли відомо, що поверхня є поверхнею додатної Гауссової кривини.

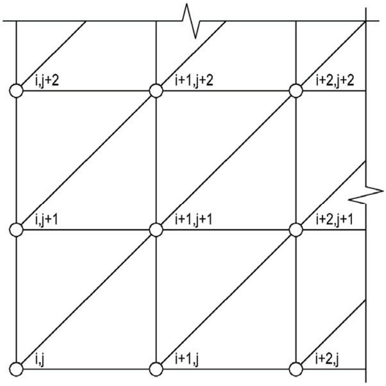


Рис. 2. До обчислення значень дискретного аналогу Гауссової кривини для крайніх точок

Усі перераховані способи не дозволяють отримати значення для крайніх і кутових точок відсіку поверхні. Можна припустити, що ці значення не дуже відрізняється від значень сусідніх точок. Щоб подолати цей недолік, ми пропонуємо наступний метод (рис. 2):

- для крайніх точок значення кривини обчислюється за формулами

$$A_{i+1,j} = 2 \cdot A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j+2} \text{ і } A_{i,j+1} = 2 \cdot A_{i+1,j+1} - A_{i+2,j+1},$$

де $A$ – значення дискретного аналогу Гауссової кривини, обчислене одним із трьох наведених вище методів;

- для кутових точок значення кривини обчислюється за формулами

$$A_{i,j} = 2 \cdot A_{i+1,j} - A_{i+2,j} \text{ або } A_{i,j} = 2 \cdot A_{i,j+1} - A_{i,j+2}.$$

При малих значеннях кривини цей метод дає досить точні результати. Проте при великому значенні кривини або при задані великого кроку точок просторового каркасу відхилення зростає(рис. 3, б-г).

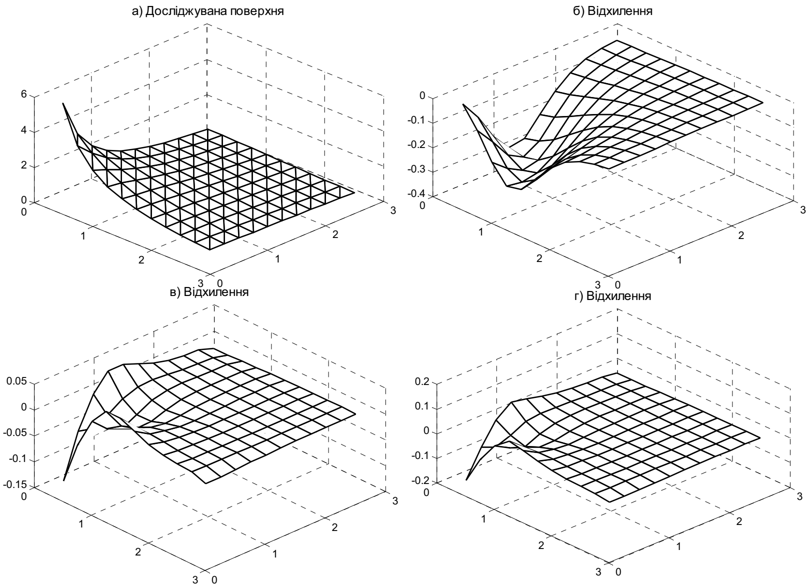


Рис. 3. До порівняння дискретних аналогів Гауссової кривини: а – відсік ДПП (поверхня обертання гіперболи $z = b/x$ навколо осі $z$); б - поверхня відхилень поверхні дискретного аналогу Гауссової кривини для першого способу; в - поверхня відхилень поверхні дискретного аналогу Гауссової кривини для другого способу (барицентричні комірки); г - поверхня відхилень поверхні дискретного аналогу Гауссової кривини для третього способу (комірки Вороного).

**Висновки і перспективи подальших досліджень.** Практика показала, що найбільш універсальним є метод, при якому обчислюється площа барицентричної комірки, що у більшості випадків дав найточніші результати. Подальші дослідження можна спрямувати на розроблення алгоритмів для отримання дискретного аналогу Гауссової кривини, які б враховували довільне розташування точок просторового каркасу дискретно представленої поверхні. Також планується проаналізувати інші аналоги диференціальних характеристик дискретно представленої поверхні.

## Література

1. *Александров А.Д.* Выпуклые многогранники / А.Д. Александров. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.

2. *Препарата Ф.* Вычислительная геометрия / Ф. Препарата, М. Шеймос – М.: Мир, 1989. – 478 с.

3. *Meyer M.* Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds / Meyer M., Desbrun M., Schroder P., Barr A. H. // [Електронний ресурс – режим доступу:
http://users.cms.caltech.edu/~mmeyer/Publications/diffGeomOps.pdf.

## СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

***С. И. Литницкий, Е. В. Пугачев***

Проведено сравнение способов определения дискретного аналога Гауссовой кривизны для отсеков дискретно представлених поверхностей на прямоугольном плане с сопоставлением результатов со значениями, полученными для континуально заданных поверхностей. Приведены преимущества и недостатки способов определения дискретного аналога Гауссовой кривизны. Предложен метод вычисления значений дискретного аналога Гауссовой кривизны для крайних и угловых точек отсека поверхности. Показаны поверхности отклонения поверхностей дискретных аналогов Гауссовой кривизны, рассчитанных разными способами, от действительных значений.

## COMPARISON OF WAYS FOR GAUSSIAN CURVATURE DISCRETE ANALOGUE DEFINITION

***S. I. Litnitskiy, E. V. Pugachov***

Comparison of ways to define a discrete analogue of Gaussian curvature to section discrete presented surfaces on rectangular plan is made and the results of comparison of obtained values for continually presented surfaces are given. Advantages and disadvantages of the ways to determine the Gaussian curvature discrete analogue are shown. The calculating values method of Gaussian curvature discrete analogue for extreme and corner points of section is proposed. Gaussian curvature discrete analogues surfaces are calculated and their deflection surfaces are shown.