УДК 515.2

**Г. В. Морозова**, к.т.н.,
**О. І. Сухарькова**

# ІДЕНТИФІКАЦІЯ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЦЕНТРАЛЬНИХ МОМЕНТІВ ЇХ ЗОБРАЖЕНЬ

*Українська державна академія залізничного транспорту (м. Харків)*

***Розглянуто спосіб ідентифікації геометричного об'єкту на площині за допомогою обчислення центральних моментів його зображення. Показано геометричну сутність методу центральних моментів в алгоритмах ідентифікації геометричних об'єктів.***

**Постановка проблеми**. Розпізнавання плоских та просторових об'єктів являє собою важливу задачу. Подібні алгоритми використовуються в робототехніці для розпізнавання сцени, складеної з об'єктів типу паралелепіпедів, кубів, пірамід, призм. Ефективним впровадженням розпізнавання також буде спосіб автоматичного сортування деталей на конвеєрі тощо. Для класифікації геометричних об'єктів використовуються методи, які базуються на ідеях форми у вигляді інтегральних представлень[1].

Відповідно до даної концепції будь-яке надходження вхідного зображення має певну інформативність, яку можна оцінити дійсним числом – тобто функціоналом, що визначає міру інформативності. Даний функціонал має властивість монотонності - більш інформативне подання має більш високий показник інформативності, і задовольняє граничній умові - інформативність самого неінформативного надходження дорівнює нулю. Ці властивості дозволяють у дискретному випадку представити міру інформативності як монотонну функцію множини (міру). Поява саме монотонної (неадитивної) міри при описі інформативності геометричних образів обумовлена тим, що інформативність геометричного об'єкта, як правило, не складається з інформативності його частин [2].

Прикладами таких мір можуть служити нормована довжина контуру, нормована площа контуру, якщо цей контур обмежує опуклу множину, нормована сумарна (інтегральна) оцінка кривини контуру, тощо.

**Аналіз останніх досліджень**. У роботі [3] наведено результати класифікації літаків за їх контурами. У роботі [4] розроблено метод опису контуру і спеціальну граматику, обсяг якої необхідно врахувати всі різновиди положень об'єкта щодо спостерігача. Однак, як вказується в роботі [5], тривалість обробки інформації при цьому буде занадто великою. Інший підхід до розпізнавання полягає в представленні об'єкта вектором, координати якого збігаються з коефіцієнтами розкладу контуру обрису геометричного об'єкта в ряд Фур'є.

Оскільки зовнішній контур, як правило, є замкнутим, то його розкладання у ряд має вигляд періодичної функції [6]. Також відомий метод розпізнавання, заснований на використанні інваріантних характеристик контуру обрису геометричного об'єкта [7]. Але головні труднощі, з яким стикаються дослідники при складанні алгоритмів розпізнавання за згаданими методами, полягають у необхідності опису на картинній площині контуру обрису проекції геометричного об'єкта. А це є типовою задачею прикладної геометрії. Існує скептична точка зору на використання моментів в алгоритмах розпізнавання. Зазначене спостереження звичайно формулюють так: маючи навіть скільки завгодно декартових моментів, не можна відновити функцію, яка їх «породила». А це значить, що для довільного виду графічних зображень (переважно для зображень низької якості), не можна одержати прийнятні результати.

**Постановка задачі**. Розробити спосіб ідентифікації геометричного об'єкту на площині за допомогою обчислення центральних моментів його зображень. Розглянути геометричну сутність методу центральних моментів в алгоритмах ідентифікації геометричних об'єктів.

**Основна частина**. Позначимо через

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y)dxdy, \qquad p,q = 0,1,2,...$$

Тоді моменти нормалізованого зображення, тобто поміщеного у коло одиничного радіуса, можна обчислити за допомогою формули

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_t)^p (y-y_t)^q f(x,y)dxdy\,, \tag{1}$$

де $p,q = 0,1,2,\ldots$, і $x_t = m_{10}/m_{00}$, $y_t = m_{01}/m_{00}$ - координати центрів.

Для ідентифікації фігур на площині доцільно використовувати не моменти $\mu_{pq}$ безпосередньо, а розраховані на їхній основі характеристики

$$\nu_{pq} = \frac{\left|\mu_{pq}\right|}{\sum\limits_{i+j=p+q}\left|\mu_{ij}\right|} \qquad (p,q = 1, 2, ...). \tag{2}$$

У знаменнику формули (2) знаходиться сума модулів всіх моментів порядку ($p+q$). Ці ознаки, маючи переваги моментів $\mu_{pq}$, мають ще додаткові особливості, відмічені в роботах [3,4]: ознаки $\nu_{pq}$ інваріантні до відображень проектування щодо координатних осей *Ox* і *Oy*, а також до їх поворотів на кут $\pi$, оскільки при цьому міняються, в гіршому разі, лише знаки окремих моментів, а в (2) беруть участь лише модулі останніх, що дозволяє спростити відповідний алгоритм орієнтування. Крім того, величини $\nu_{pq}$ інваріантні також до зміни масштабу проекції. Дійсно, при зміні її масштабу в $k$ раз момент $\mu_{pq}$ змінюється в $k^{p+q+2}$ разів (для силуету) або в $k^{p+q+1}$ раз (для контуру), але оскільки всі моменти у співвідношенні (2) мають той самий порядок, то величина $\nu_{pq}$ не змінюється; у зв'язку з нормуванням моментів в (2) всі значення величин $\nu_{pq}$ змінюються в тому самому діапазоні $0 \le \nu_{pq} < 1$.

За допомогою моментів можна визначити геометричні параметри фігури на площині. Зокрема, площу S фігури визначають моментом нульового порядку. Тоді координати центра ваги фігури визначають за допомогою моментів першого порядку

$$x_C = \mu_{10} = \frac{\sum_i x_i}{S} \quad \text{і} \quad y_C = \mu_{01} = \frac{\sum_j y_j}{S}, \tag{3}$$

де пари індексів i,j відповідають точкам растрового зображення фігури.

Моменти другого порядку

$$\mu_{20} = \sum_i x_i^2 - \frac{\mu_{10}^2}{S}, \qquad \mu_{02} = \sum_j y_j^2 - \frac{\mu_{01}^2}{S} \qquad \text{і}$$

$$\mu_{11} = \sum_i \sum_j x_i y_j - \frac{\mu_{10}\mu_{01}}{S} \tag{4}$$

можна використовувати для знаходження ознак, інваріантних до переносу й повороту фігури [6,7]. Зокрема, орієнтація фігури визначається величиною кута $\varphi = \frac{1}{2} arctg \frac{2\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}}$, де кут напрямку утвориться з віссю, що відповідає індексу *i*.

Для коректності використання необхідно виділити клас графічних зображень на картинній площині, для яких можна методом моментів відновлювати функції, що описують ці зображення. Обмеження не позначаються на спеціальних практичних впровадженнях методу моментів. Вважатимемо, що зображення позбавлені «шуму» і являють собою сукупність фігур на площині - кіл, багатокутників, овалів тощо. Інакше кажучи, при цьому виключаються різного роду "екзотичні" зображення (типу фотографій, креслень, штрихових малюнків тощо).

Наочно процес ідентифікації фігури на площині за допомогою моментів можна представити в такий спосіб [8]. Розглянемо в просторі *Oxyz* поверхню *W* (параболоїд), описану рівнянням $z = x^2 + y^2$. Тоді значення суми $m_{22} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(x_i^2 + y_i^2)$ можна вважати моментом четвертого порядку для фігури *G* на площині *Oxy* за умови, що всі *N* точок $(x_i, y_i)$ належать цій фігурі. На рис. 1 фігура G зображено на площині *Oxy* в колі одиничного радіуса й зафарбовано.

З іншого боку, значення величини $m_{22}$ при $N \to \infty$ чисельно дорівнює об'єму півпростору $z > 0$, розташованого під поверхнею *W* і усередині прямої циліндричної поверхні з контуром фігури *G* як напрямної. Якщо збільшувати величину степені полінома в описі поверхні *W*, то послідовність відповідних параболоїдів буде прагнути до прямої кругової циліндричної напівповерхні з колом одиничного радіуса в основі. Це базується на тому, що при збільшенні показника степені *n* всі параболи $y = x^n$ будуть проходити через точку з координатами (1, 1) (рис.2).

Наведена геометрична інтерпретація дозволяє пояснити причину того, що за допомогою моментів високих порядків можна "піймати" навіть дрібні деталі зображення, розташовані на границі фігури.

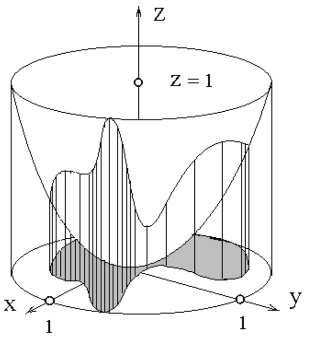


Рис.1. Фігура G на площині *Oxy*

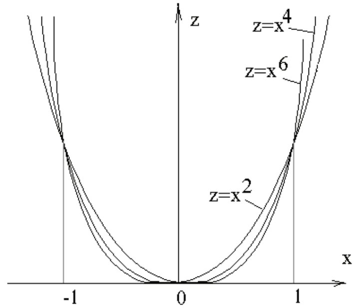


Рис.2. Переріз графіка функції

Існує велика кількість конкретних виразів для опису центральних моментів. В роботі [9] представлено загальну методику автоматичного генерування інваріантів центральних моментів будь-яких степенів і порядків. Метод ґрунтується на поданні інваріантів центральних моментів за допомогою графіків (аналогічних зображенням графів).

Для прикладу наведемо десять інваріантів до четвертого порядку:

$$I_1 = (\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2)/\mu_{00}^4;$$

$$\begin{aligned} I_2 = {} & (-\mu_{30}^2\mu_{03}^2 + 6\mu_{30}\mu_{21}\mu_{12}\mu_{03} - 4\mu_{30}\mu_{12}^3 \\ & -4\mu_{21}^3\mu_{03} + 3\mu_{21}^2\mu_{12}^2)/\mu_{00}^{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 = {} & (\mu_{20}\mu_{21}\mu_{03} - \mu_{20}\mu_{12}^2 - \mu_{11}\mu_{30}\mu_{03} + \mu_{11}\mu_{21}\mu_{12} \\ & +\mu_{02}\mu_{30}\mu_{12} - \mu_{02}\mu_{21}^2)/\mu_{00}^7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 = {} & (-\mu_{20}^3\mu_{03}^2 + 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{12}\mu_{03} - 3\mu_{20}^2\mu_{02}\mu_{12}^2 \\ & -6\mu_{20}\mu_{11}^2\mu_{21}\mu_{03} - 6\mu_{20}\mu_{11}^2\mu_{12}^2 \\ & +12\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{21}\mu_{12} - 3\mu_{20}\mu_{02}^2\mu_{21}^2 \\ & +2\mu_{11}^3\mu_{30}\mu_{03} + 6\mu_{11}^3\mu_{21}\mu_{12} - 6\mu_{11}^2\mu_{02}\mu_{30}\mu_{12} \\ & -6\mu_{11}^2\mu_{02}\mu_{21}^2 + 6\mu_{11}\mu_{02}^2\mu_{30}\mu_{21} - \mu_{02}^3\mu_{30}^2)/\mu_{00}^{11}; \end{aligned}$$

$$I_5 = (\mu_{40}\mu_{04} - 4\mu_{31}\mu_{13} + 3\mu_{22}^2)/\mu_{00}^6;$$

$$I_6 = (\mu_{40}\mu_{22}\mu_{04} - \mu_{40}\mu_{13}^2 - \mu_{31}^2\mu_{04} + 2\mu_{31}\mu_{22}\mu_{13} - \mu_{22}^3)/\mu_{00}^9;$$

$$\begin{aligned} I_7 = {} & (\mu_{20}^2\mu_{04} - 4\mu_{20}\mu_{11}\mu_{13} + 2\mu_{20}\mu_{02}\mu_{22} + 4\mu_{11}^2\mu_{22} \\ & -4\mu_{11}\mu_{02}\mu_{31} + \mu_{02}^2\mu_{40})/\mu_{00}^7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_8 = {} & (\mu_{20}^2\mu_{22}\mu_{04} - \mu_{20}^2\mu_{13}^2 - 2\mu_{20}\mu_{11}\mu_{31}\mu_{04} \\ & +2\mu_{20}\mu_{11}\mu_{22}\mu_{13} + \mu_{20}\mu_{02}\mu_{40}\mu_{04} \\ & -2\mu_{20}\mu_{02}\mu_{31}\mu_{13} + \mu_{20}\mu_{02}\mu_{22}^2 + 4\mu_{11}^2\mu_{31}\mu_{13} \\ & -4\mu_{11}^2\mu_{22}^2 - 2\mu_{11}\mu_{02}\mu_{40}\mu_{13} + 2\mu_{11}\mu_{02}\mu_{31}\mu_{22} \\ & +\mu_{02}^2\mu_{40}\mu_{22} - \mu_{02}^2\mu_{31}^2)/\mu_{00}^{10}; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_9 \quad = \quad & (\mu_{30}^2\mu_{12}^2\mu_{04} - 2\mu_{30}^2\mu_{12}\mu_{03}\mu_{13} + \mu_{30}^2\mu_{03}^2\mu_{22} \\
& -2\mu_{30}\mu_{21}^2\mu_{12}\mu_{04} + 2\mu_{30}\mu_{21}^2\mu_{03}\mu_{13} \\
& +2\mu_{30}\mu_{21}\mu_{12}^2\mu_{13} - 2\mu_{30}\mu_{21}\mu_{03}^2\mu_{31} \\
& -2\mu_{30}\mu_{12}^3\mu_{22} + 2\mu_{30}\mu_{12}^2\mu_{03}\mu_{31} + \mu_{21}^4\mu_{04} \\
& -2\mu_{21}^3\mu_{12}\mu_{13} - 2\mu_{21}^3\mu_{03}\mu_{22} + 3\mu_{21}^2\mu_{12}^2\mu_{22} \\
& +2\mu_{21}^2\mu_{12}\mu_{03}\mu_{31} + \mu_{21}^2\mu_{03}^2\mu_{40} - 2\mu_{21}\mu_{12}^3\mu_{31} \\
& -2\mu_{21}\mu_{12}^2\mu_{03}\mu_{40} + \mu_{12}^4\mu_{40})/\mu_{00}^{13} \qquad ; \\
I_{10} \quad = \quad & (-\mu_{50}^2\mu_{05}^2 + 10\mu_{50}\mu_{41}\mu_{14}\mu_{05} - 4\mu_{50}\mu_{32}\mu_{23}\mu_{05} \\
& -16\mu_{50}\mu_{32}\mu_{14}^2 + 12\mu_{50}\mu_{23}^2\mu_{14} - 16\mu_{41}^2\mu_{23}\mu_{05} \\
& -9\mu_{41}^2\mu_{14}^2 + 12\mu_{41}\mu_{32}^2\mu_{05} + 76\mu_{41}\mu_{32}\mu_{23}\mu_{14} \\
& -48\mu_{41}\mu_{23}^3 - 48\mu_{32}^3\mu_{14} + 32\mu_{32}^2\mu_{23}^2)/\mu_{00}^{14}
\end{aligned}
$$

Зазначені інваріанти як міри інформативності можна застосовувати для фільтрації (згладжування) зображень, сегментації зображень, згладжування контурів, вибору найбільш інформативних полігональних подань контурів. На основі таких мір можна розробити алгоритм виділення контрольних точок за критерієм максимуму кривизни, а також алгоритм виділення контрольних точок і одержання мінімального полігонального подання оберненим методом площ (наприклад, до трикутника найбільшої площі додаються ті точки, які максимально збільшують площу фігури, обмеженої контуром).

Крім того, актуальним буде алгоритм згладжування при обмеженнях, який реалізує мінімізацію кривини контуру за умови, що множина точок контуру є деякою множиною із заданою функцією належності. Для реалізації геометричного згладжування цікавим буде алгоритм виділення контрольних точок, де для кожної точки контуру обчислюється деяка її геометрична характеристика, що залежить від кривини контуру. Як контрольні вибираються ті точки, в яких кривина максимальна. І, нарешті, алгоритми одержання контурного зображення за допомогою локального методу виявлення країв напівтонового зображення в міру інформативності.

**Висновок**. Розглянуте математичне забезпечення доцільно покласти в основу розробки алгоритмів ідентифікації геометричних об'єктів на площині за допомогою обчислення центральних моментів їх зображень.

## Література


1. *Корчинский В.М.* Инвариантные информационные признаки пространственных форм проекционных изображений // Прикладная геометрия и инженерная графика.- К.: КГТСУА, 1994, вып.57 -с.87-89.

2. *Анисимов Б.В., Курганов В.Д., Злобин В.К.* Распознавание и цифровая обработка изображений.- М.: Высшая школа, 1983. - 295 с.

3. *Gilmore J.F., Pemberton W.B.* A suivery of aircraft classification algorithms.- 7th Int. Conf. On PR., Montreal, 1984, p.559-562

4. *Fu K.S., You K.C.* Syntactic shape recognition using attributed grammars.- Purdue University Tech. Report TE-EE 78-38, 1978

5. *Фор А.* Восприятие и распознавание образов. -М.: Машиностроение, 1989. - 272 с.

6. *Wolf S., Louvion J.R.* Considerations sur les formes: pseudo symetrie representation.- 2e congres AFCET-IRIA/ Reconnassance des Formes et Intelligence Artificielle, Toulouse, 1979, p 381- 387

7. *Dudani J.A., Breeding K.J.* Aircraft identification by moments invariants.- IEEE Trans. On Computers, 1997

8. *Куценко Л.Н., Сивак Е.М.* Идентификация трехмерных объектов при помощи центральных моментов их изображений. В сб. Прикладная геометрия и инженпрная графика.Вып.59, Киев:КГТУСА,1996,с.145-149.

9. *Suk T., Flusser J.,* Graph method for generating affine moment invariants. - ICPR 2004, 17th International Conference on Pattern Recognition, IEEE Computer Society, 2004, p. 192–195.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

***Г. В. Морозова, О. И. Сухарькова***

Рассмотрен способ идентификации геометрического объекта на плоскости при помощи вычисления центральных моментов его изображения. Показана геометрическая сущность метода центральных моментов в алгоритмах идентификации геометрических объектов.

## IDENTIFICATION OF FIGURES ON THE PLANE BY MEANS OF THE CENTRAL MOMENTS OF THEIR IMAGES

***G. V. Morozova, O. I. Sukharkova***

The method of identification of geometrical object on the plane by means of computation of the central moments of its image is considered. The geometrical entity of a method of the central moments in algorithms of identification of geometrical objects is shown.