УДК 514.18

В. М. Найдиш

И. Г. Балюба, д.т.н.,
В. М. Верещага, д.т.н.

АЛГЕБРА БН-ИСЧИСЛЕНИЯ

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры.
Таврический государственный агротехнологический университет.

Исследуются свойства различных алгебр для групп, полугрупп, квазигрупп, полей, колец, тел с целью определения алгебраической системы для точечного исчисления Балюбы-Найдыша. Установлено, что полем элементов, над которыми выполняется точечное исчисление – действительные числа, а алгеброй БН-исчисления есть алгебра операторного кольца.

Постановка проблемы. На наш взгляд, наиболее результативным в математике, геометрии, а также и в прикладной геометрии является аксиоматический метод проведения научных исследований на теоретико-множественной основе. В соответствии с ним, всякая геометрическая теория, фундаментального или прикладного характера, должна брать в основу и изучать определенную алгебраическую систему. Другими словами, изучать множества с выделенными в них отношениями, в частности, алгебраическими операциями, удовлетворяющими определенным условиям – аксиомам.

Развитие точечного исчисления Балюбы-Найдыша, которое предложено авторами, в дальнейшем, называть «БН-исчислением», требует установить для него границы применения, другими словами, определить алгебраическую систему, в которой рассматриваются множество операций над его элементами, аксиомы и т.д.

Анализ последних исследований и публикаций. Идею и необходимость теоретико-множественного подхода, при разработке БН-исчисления, с определением алгебраической системы операций в нем и над каким множеством эта система применяется, высказал, еще при жизни, В.М. Найдыш. Но, в силу целого ряда ограничений, тогда не было возможности реализовать эту идею, и поэтому в такой постановке вопрос алгебры БН-исчисления рассматривается впервые.

Формирование целей статьи. Сформулировать, в первом приближении, алгебру БН-исчисления.

Основная часть. Прикладная геометрия, рассматривает теоретические исследования, практического характера, содержащие, как правило, расчеты, то есть, в конечном результате, мы получаем набор чисел, дающий решение. Вопросами понимания числа, введению новых чисел, развитию их теорий человечество занималось с древних времен. Так, например, И. Ньютон во «Всеобщей арифметике» определил, что число есть не столько совокупность нескольких единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой, однородной с ней, принятой за единицу. Теория БН-исчисления построена на отношениях геометрических образов евклидова пространства с учетом их направленности (ориентации) положительной или отрицательной.

Использование отношений привлекательно еще и тем, что они являются инвариантом параллельного проецирования. Простейшими примерами геометрических образов есть точка и прямая и, поэтому, необходимо установить их связь с числом. Как известно [1, 2] между точками евклидовой прямой, упорядоченными по их положению, и элементами числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок, который согласуется с действительными числами, образующими числовое поле, отдельные элементы которого соответствуют точкам, а все поле – направленной евклидовой прямой. Данное числовое поле непрерывно и образует множество чисел вида $\frac{H(\alpha)}{F(\alpha)}, F(\alpha) \neq 0$, где α – любое фиксированное действительное число, а $H(\alpha)$ и $F(\alpha)$ пробегают все возможные многочлены с рациональными коэффициентами. Поле действительных чисел непрерывно потому, что на числовой прямой возможно построить бесконечное множество дедекиндовых сечений. $A|B$, являющиеся иррациональными числами и положение которых определяется отношением несоизмеримых отрезков евклидовой прямой.

Поскольку точки в БН-исчислении являются основным элементом, на базе которого оно логически развивается, а, в свою очередь, между евклидовой прямой БН-исчисления и числовой прямой, которая отображает поле действительных чисел, существует взаимно однозначное соответствие, то можно сделать вывод, что операции БН-исчисления выполняются над полем действительных чисел, элементы которого обладают следующими свойствами, которые, следовательно, присущи и элементам БН-исчисления:

1. Свойство упорядоченности: для любых двух чисел a и b существует одно и только одно из следующих соответствий: $a < b$, $a = b$, $a > b$, при этом $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (транзитивность упорядоченности).

2. Свойства операции сложения: для любой упорядоченной пары чисел a и b всегда определена их сумма, для которой $a + b = b + a$ (коммутативность); для любой упорядоченной тройки чисел a, b, c справедливо $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность); существует число ноль – 0, что $a + 0 = a$; для любого числа a существует противоположное, которое обозначается $-a$, что $a + (-a) = 0$; если $a < b, a + c < b + c$ для любого числа c.

3. Свойство операции умножения: для любой упорядоченной пары чисел a и b однозначно определено их произведение ab, для которого $ab = ba$ (коммутативность); $(ab)c = a(bc)$ для любых чисел a, b, c (ассоциативность); существует единица – 1, что $a \cdot 1 = a$ для любого числа a; для любого числа $a \neq 0$ существует обратное число $\frac{1}{a}$, что $a(\frac{1}{a}) = 1$; если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.

4. Свойство дистрибутивности умножения относительно сложения: для любой тройки чисел a, b, c $(a + b)c = ac + bc$.

5. Архимедово свойство: каким бы ни было число a, существует такое целое число n, что $n > a$. Элементы действительных чисел, отвечающие свойствам 1-5, образуют архимедово поле.

6. Свойство непрерывности: для всякой системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.

Эти свойства определяют множество действительных чисел с точностью до изоморфизма, а, следовательно, и БН-исчисление обладает свойствами изоморфизма: если имеются две совокупности X и Y, удовлетворяющие свойствам 1-6, то всегда существует изоморфное, относительно упорядоченности и бинарных операций сложения и умножения, взаимно однозначное отображение X на Y, то есть $x \to y$, (здесь $x \in X; y \in Y$) так, что если $x_1 < x_2, x_1 \in X, x_2 \in X$ и $x_1 \to y_1, x_2 \to y_2$, то $y_1 < y_2$, $x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$, $x_1 x_2 \to y_1 y_2$ свойства непрерывности и полноты архимедова поля позволяют в БН-исчислении измерять длины геометрических отрезков и получать их отношения, которые являются основополагающим элементом операций БН-исчисления.

Таким образом, исходя из выше изложенного, можно сделать вывод, что операции в БН-исчислении выполняются над полем действительных числе, которое удовлетворяет архимедовой группе, обладает возможностью построения дедекиндового сечения.

Поскольку действительные числа образуют самую большую архимедову группу, позволяют использовать две бинарные операции, которые так же используются в БН-исчислении, то можно сделать вывод, что операции применяемые в БН-исчислении, образуют кольцо, удовлетворяющее условию алгебры. Как известно [3, 4], что кольцо является абелевой группой относительно сложения и операций умножения, в которых удовлетворяет правому и левому законом дистрибутивности относительно сложения, т.е. $x(y + z) = xy + xz$ и $(y + z)x = yx + zx$ для любых элементов из кольца. Кольцо является телом, если множество его ненулевых элементов образуют группу относительно умножения. Любое тело является ассоциативным кольцом с единицей и без делителей нуля. Ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля и с единицей называется областью целостности. Ассоциативно-коммутативное кольцо с кольцом операторов (операций) над ними называется алгеброй.

Исходя из выше сказанного, алгебра БН-исчисления есть ассоциативно-коммутативное кольцо множества с ассоциативно-коммутативным кольцом операций над ним. Наиболее полно, с геометрической точки зрения, этим условиям отвечает координатное аффинное пространство, снабженное топологической структурой, которое используется в нормированном евклидовом пространстве относительно скалярного произведения. Здесь речь идет об алгебре того БН-исчисления, которое в настоящий момент разрабатывается и исследуется в Мелитопольской школе и её Макеевском филиале. Если, в перспективе, будет произведено расширение его алгебры, то, естественно, будет уточнена и геометрия этого расширения.

БН-исчисление представляет собой направление в прикладной геометрии, построено на аксиоматике теории множеств с самым широким использованием колец операций и операций логики, направленное на обеспечение компьютерного моделирования геометрически определенных форм с помощью точек. Под точкой в БН-исчислении понимается элемент поля, не содержащий, вложенных в него, других элементов этого поля, который не имеет измерений и определяется только параметрами (в частном случае – координатами) положения, которые представляют совокупность n чисел со строго определенным порядком следования, отражающие единое дискретное явление.

Обозначается точка прописными буквами латинского алфавита A,B,…, конечная текущая точка – прописной буквой M; параметры p_i записываются рядом с буквой в скобках здесь $i = \overline{1,n}$; n – размерность пространства.

Каждый из p_i параметров задается кольцом над полем действительных чисел и образуются отношением $p_i(t) = \dfrac{H_i(t)}{F_i(t)}$, $F \neq 0$, t – любое фиксированное число из поля действительных чисел, $H_i(t)$ и $F_i(t)$ – произвольные функции над полем действительных чисел, которые пробегает переменная t. Переменная (параметр) t является связующей для всех параметров $p_i(t)$.

Операции с точками можно отобразить следующим образом $f[(p_1(t), p_2(t),..., p_n(t))] = [f(p_1(t)), f(p_2(t)),..., f(p_n(t))]$, при этом, кольца операций для всех $i = \overline{1,n}$ и $k = \overline{1,n}$ при $k \neq i$ $p_i(t) \cap p_k(t) = \varnothing$. Это означает, что между параметрами с разными индексами никаких операций быть не может, здесь $\cap$ – пересечение, Ø – пустое множество. Хотя параметры с разными индексами могут пересекаться, но, при этом, все равно оставаться разными множествами полностью или на отдельных участках числовой оси. Другими словами, для параметров p_i, $i = \overline{1,n}$ БН-исчисления, при совпадении функций $H_i(t) \equiv H_{i+1}(t)$ и $F_i(t) \equiv F_{i+1}(t)$ полностью или частично, объединение $p_i \cup p_{i+1} =$ Ø – пустое множество. Например, пусть заданы две точки $A(p_1, p_2,..., p_n)$ и $B(q_1, q_2,..., q_n)$, нужно их сложить $A + B = C((p_1 + q_1), (p_2 + q_2),..., (p_n + q_n))$, точка C – сумма двух точек A и B, т.е. операции над точками сводятся к операциям между соответствующими параметрами этих точек. Этому правилу подчиняются и все другие операции из кольца операций над точками. Нужно отметить, что не могут выполняться операции над точками с разной размерностью. Исходя из вышеизложенного, индексы параметров, в БН-счислении, имеют важное значение, они играют роль общих имен множеств, определяющих координаты точки.

В БН-исчислении применяются и все другие предикатные символы аксиоматической теории множеств: $\in$ – знак принадлежности; = – знак равенства; оператор дискретизации ζ, означающий «такой объект, что …»;

логические связки и кванторы: $\leftrightarrow$ или $\sim$ – эквивалентно, $\rightarrow$ – влечет, следовательно; $\vee$ – или; $\wedge$ – и; $\urcorner$ – не; $\forall$ – для всех; $\exists$ – существует; (,) – скобки; $\cap$ – пересечение; $\cup$ – объединение; $\subset$ – принадлежность; черточка сверху над любым знаком или перечеркивание знака обозначает – «не»; * – любая из перечисленных выше связок; { } – элементы в скобках составляют множество; | – вертикальная черта заменяет слово «что»; Ø – пустое множество; < > – упорядоченные элементы. Здесь мы не претендуем на полный перечень предикатных символов, используемых в БН-исчислении, но считаем, что он есть достаточно полным для его применения.

Если исходить из исчисления предикатов, которое, как известно [5], является формальной аксиоматической теорией и предназначено для описания логических законов и операций, справедливых для любой непустой области объектов с произвольными заданными на этих объектах предикатами (т.е. свойствами и отношениями), то фундаментальной базой для построения всех формул есть целый ряд аксиом, используя которые, с применением логических связей, можно формализовать любую теорию. Аксиомы БН-исчисления в полной мере отвечают аксиомам исчисления предикатов, которые образуют кольцо операций в предикатном исчислении, а, следовательно, и операции, применяемые в БН-исчислении, тоже образуют кольцо операций в БН-исчислении. Таким образом, исходя из выше проведенных рассуждений о том, что поле действительных чисел, которые использует БН-исчисление является кольцом и операции, применяемые в БН-исчислении, образуют абелеву группу и тоже подчиняются законам алгебры кольца, то можно сделать вывод, что алгебраическая система, в которой работает БН-исчисление, есть модуль в его расширенном понимании или операторное кольцо [6], под которым понимается кольцо с областью операторов, содержащих область унарных операций, которые связаны обычными кольцевыми тождествами.

Исходя из выше сказанного, можно сделать вывод, что алгебра БН-исчисления представляет операторное кольцо – кольцо операций над кольцом поля действительных чисел.

Выводы. Установлено, что операции БН-исчисления выполняются над полем действительных чисел, элементы которого отвечают алгебраическим операциям кольца. Кроме того, сами операции БН-исчисления соответствуют алгебре колец. В результате можно сделать вывод, что алгеброй БН-исчисления является операторное кольцо.

Литература

1. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ / *Л.Д. Кудрявцев* // т. 1, 2 изд.– М., 1973.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / *Г.М. Фихтенгольц* // т. 2, 7 изд.– М., 1969.

3. *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы (пер. с франц.) / *Н. Бурбаки*.– М., 1966.

4. *Джекобсон Н.* Теория колец (пер. с франц.) / *Н. Джекобсон*.– М., 1947.

5. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики (пер. с нем.) / *Д. Гильберт, П. Бернайс* // 2 изд.– М., 1982.
6. *Курош А.Г.* Лекции про общей алгебре / *А.Г. Курош* // 2 изд.– М., 1972.

АЛГЕБРА БН-ЧИСЛЕННЯ

В. М. Найдиш, ***І. Г. Балюба,*** ***В. М. Верещага***

Досліджуються властивості різних типів алгебри для груп, напівгруп, квазигруп, полів, кілець, тіл з метою визначення алгебраїчної системи для точкового числення Балюби-Найдиша. Встановлено, що полем елементів, над якими виконуються точкове числення — є дійсні числа, а алгеброю БН-числення є алгебра операторного кільця..

ALGEBRA OF THE BALYUBA-NAYDYSH'S DOT CALCULATION

V. Naydish, ***I. Baluba,*** ***V. Vereshaga***

We investigate the properties of different types of algebras for groups, semigroups, kvazygroups, fields, rings, bodies to determine the algebraic system for Balyuba-Naydysh's dot calculation. We set, that element field over which we performed dot calculation -are real numbers and algebra of BN-calculus is algebra of the operator rings.