

КОНСТРУЮВАННЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ СТАЛОЇ СЕРЕДНЬОЇ КРИВИНИ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Складено диференціальне рівняння меридіонального перерізу гвинтової поверхні сталої середньої кривини. Чисельними методами побудовано криві перерізу при трансформації поверхонь обертання у гвинтові. Розглянуто трансформацію всіх відомих поверхонь обертання сталої середньої кривини у гвинтові із збереженням чисельного значення середньої кривини.

Постановка проблеми. Якщо взяти гнучку розтягну плівку у вигляді оболонки для розмежування двох газових середовищ із різними тисками, то вона прийме форму поверхні середньої сталої кривини. Прикладом може служити повітряна бульбашка у вигляді кулі, якщо мильну плівку надувати через коло. Якщо мильна плівка проходить через два кола в паралельних площинах, то утворюється катеноїд – відома мінімальна поверхня нульової середньої кривини. Однак при нагнітанні повітря через обидва кола одночасно виникає різниця тисків, поверхня деформується, проте в кожен момент часу вона буде поверхнею сталої середньої кривини, причому кривина буде прямо пропорційною різниці тисків. Однією із проміжних поверхонь буде також циліндрична поверхня. Всі ці поверхні обертання відомі в науковій літературі, однак поза увагою залишаються гвинтові поверхні сталої середньої кривини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З огляду на практичне значення конструювання зазначених поверхонь, які можуть виготовлятися у вигляді балонів для зберігання стисненого газу, поверхні обертання сталої середньої кривини розглядалися в працях різних авторів [1-4]. Було також досліджено гвинтові та поверхні обертання, у яких середня кривина не є сталою, однак змінюється в заданих межах [5, 6].

Формулювання цілей та завдання статті. Розробити математичну модель конструювання гвинтових поверхонь сталої середньої кривини на осові побудови меридіональних перерізів цих поверхонь.

Основна частина. Якщо плоску криву обернути навколо прямої, що лежить в цій площині, і одночасно переміщувати її вздовж осі обертання, то утвориться гвинтова поверхня, меридіональним перерізом якої буде задана плоска крива. Для гвинтової поверхні сталого кроку відношення швидкостей поступального руху плоскої твірної кривої вздовж осі обертання і обертального руху твірної кривої навколо осі обертання повинне бути сталим. Якщо плоска крива (меридіональний переріз) задана параметричними рівняннями у вигляді $x = p(u)$; $y = f(u)$, де u – змінна, то при її обертанні навколо осі Ox і одночасному переміщенні вздовж неї утвориться гвинтова поверхня. Поточне значення координати y буде відстанню точки поверхні від осі обертання, тобто

поточним радіусом обертання. Якщо вісь обертання зробити вертикальною, тобто сумістити її із віссю Oz , то рівняння гвинтової поверхні запишеться:

$$\begin{aligned} X &= f(u) \cos v; \\ Y &= f(u) \sin v; \\ Z &= p(u) + bv, \end{aligned} \quad (1)$$

де u, v – незалежні змінні поверхні;

b – гвинтовий параметр (стала величина), через яку визначається крок поверхні L за формулою $L=2\pi b$.

Середня кривина поверхні визначається через коефіцієнти першої і другої квадратичних форм:

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \quad (2)$$

У праці [6] знайдено вираз середньої кривини гвинтової поверхні, для якої меридіональним перерізом є коло. Ми будемо шукати вираз середньої кривини (2) в загальному вигляді. Диференціювання рівнянь (1) для знаходження частинних перших, других і мішаних похідних теж здійснюємо в загальному вигляді в середовищі програмного продукту «Mathematica». Результати наводимо у символах цього продукту, причому кількість штрихів біля символу означає першу або другу похідну, а наступна змінна або дві вказують, що саме по них відбувалося диференціювання. Були отримані наступні результати.

Частинні і мішані похідні:

$$\begin{aligned} X'v &= -f(u) \sin(v); & Y'v &= f(u) \cos(v); & Z'v &= b; \\ X'u &= \cos(v) f'(u); & Y'u &= \sin(v) f'(u); & Z'u &= p'(u); \\ X''vv &= f(u) (-\cos(v)); & Y''vv &= -f(u) \sin(v); & Z''vv &= 0; \\ X''uu &= \cos(v) f''(u); & Y''uu &= \sin(v) f''(u); & Z''uu &= p''(u); \\ X''uv &= -\sin(v) f'(u); & Y''uv &= \cos(v) f'(u); & Z''uv &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$G = b^2 + f(u)^2; \quad E = f'(u)^2 + p'(u)^2; \quad F = bp'(u); \quad (4)$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} N &= \frac{f[u]^2 p'[u]}{\sqrt{(b^2 + f[u]^2) f'[u]^2 + f[u]^2 p'[u]^2}}; \\ M &= -\frac{bf'[u]^2}{\sqrt{(b^2 + f[u]^2) f'[u]^2 + f[u]^2 p'[u]^2}}; \\ L &= -\frac{f[u](p'[u] f''[u] - f'[u] p''[u])}{\sqrt{(b^2 + f[u]^2) f'[u]^2 + f[u]^2 p'[u]^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Після підстановки (4) і (5) в (2) і після перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned} H &= \frac{-1}{2 * ((b^2 + f[u]^2) f'[u]^2 + f[u]^2 p'[u]^2)^{3/2}} (-2b^2 f'[u]^2 p'[u] \\ &\quad - f[u]^2 f'[u]^2 p'[u] - f[u]^2 p'[u]^2 + b^2 f[u] p'[u] f''[u] \\ &\quad + f[u]^2 p'[u] f''[u] - b^2 f[u] f'[u] p''[u] - f[u]^2 f'[u] p''[u]). \end{aligned} \quad (6)$$

Як ми бачимо, вираз середньої кривини (6) поверхні (1) не залежить від змінної v , а тільки від змінної u . Якщо надати для H сталого значення в (6), то отримане диференціальне рівняння ми не зможемо розв'язати, оскільки до нього входять дві невідомі функції: $p=p(u)$ і $f=f(u)$. Проте диференціальне рівняння (6) можна значно спростити і перейти до однієї невідомої функції, якщо криву (меридіональний переріз гвинтової поверхні) задати у функції довжини власної дуги s , тобто у вигляді $x=p(s)$; $y=f(s)$. Ці два рівняння зв'язані між собою через спільний кут α (рис. 1).

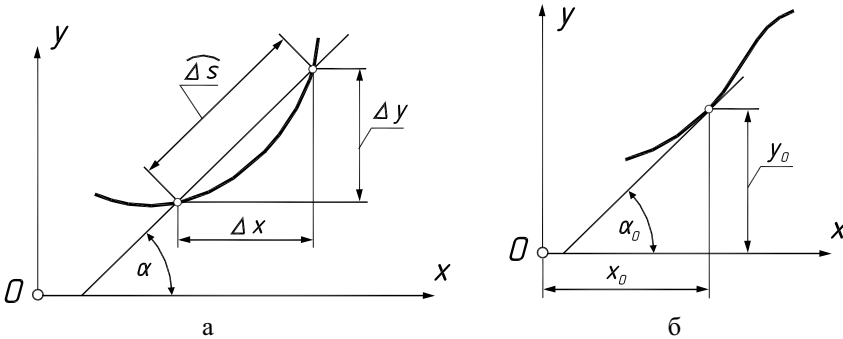


Рис. 1. До встановлення взаємозв'язку між рівняннями $x=p(s)$; $y=f(s)$:

а) визначення елемента дуги Δs через прирости функцій Δx і Δy ;

б) значення трьох параметрів кривої в поточній точці, які можуть бути початковими умовами при інтегруванні диференціального рівняння.

Із прямокутного трикутника (рис. 1,а) можна записати: $\cos \alpha = \Delta x / \Delta s$, $\sin \alpha = \Delta y / \Delta s$. Перейшовши до границі при $\Delta s \rightarrow 0$, отримаємо:

$$\frac{dx}{ds} = p' = \cos \alpha; \quad \frac{dy}{ds} = f' = \sin \alpha. \quad (7)$$

До виразів (5), (6) входять ще і другі похідні виразів p і f . Диференціюючи ще раз (7) по дузі s , отримуємо:

$$p'' = -\alpha' \sin \alpha; \quad f'' = \alpha' \cos \alpha. \quad (8)$$

Після підстановки в (4) і (5) похідних (7) і (8), коефіцієнти першої і другої квадратичних форм набувають простого вигляду:

$$\begin{aligned} G &= f^2 + b^2; & F &= b \cos \alpha; & E &= 1; \\ N &= \frac{f^2 \cos \alpha}{\sqrt{f^2 + b^2 \sin^2 \alpha}}; & M &= -\frac{b \sin^2 \alpha}{\sqrt{f^2 + b^2 \sin^2 \alpha}}; \\ L &= -\frac{b \alpha'}{\sqrt{f^2 + b^2 \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вираз середньої кривини після підстановки (9) в (2) теж спрощується:

$$H = \frac{f^2 \cos \alpha + b^2 \sin \alpha \sin 2\alpha - \alpha' f (f^2 + b^2)}{2(f^2 + b^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}. \quad (10)$$

Згідно (7) можна знайти вираз для f : $f = \int \sin \alpha ds$. Підставивши його у (10) і розв'язавши рівняння (10) відносно α' , отримаємо:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\left(\int \sin \alpha ds\right)^2 \cos \alpha + b^2 \sin \alpha \sin 2\alpha - 2H \left[\left(\int \sin \alpha ds\right)^2 + b^2 \sin^2 \alpha\right]^{3/2}}{\left(\int \sin \alpha ds\right) \left[\left(\int \sin \alpha ds\right)^2 + b^2\right]}. \quad (11)$$

До інтегро-диференціального рівняння (11) входить тільки одна невідома функція: $\alpha = \alpha(s)$. Для її знаходження було застосовано чисельні методи. Крива меридіонального перерізу поверхні розшукувалась у вигляді параметричних рівнянь:

$$x = \int \cos \alpha ds; \quad y = \int \sin \alpha ds. \quad (12)$$

При $b=0$ і $H=const$ кривою перерізу є меридіан поверхні обертання сталої середньої кривини. Розглянемо трансформацію перерізів відомих поверхонь обертання сталої середньої кривини, надаючи різних значень гвинтовому параметру b (в тому числі $b=0$ для поверхні обертання).

Випадок перший. При $b=0$ і $H=0$ маємо поверхню обертання нульової середньої кривини (мінімальну поверхню). Диференціальне рівняння (11) дуже спрощується, однак залишається інтегро-диференціальним. Щоб позбутися інтеграла, продиференціюємо його і після перетворень отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\alpha'' + 2\alpha'^2 \operatorname{tg} \alpha = 0. \quad (13)$$

Рівняння (13) має наступний розв'язок:

$$\alpha = \operatorname{Arctg}[c_1(s + c_2)], \quad (14)$$

де c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Після підстановки (14) в (12) і наступного інтегрування отримаємо параметричні рівняння меридіана мінімальної поверхні:

$$x = \frac{1}{c_1} \operatorname{Arcsinh}[c_1(s + c_2)]; \quad y = \frac{1}{c_1} \sqrt{1 + c_1^2(s + c_2)^2}. \quad (15)$$

Рівняння (15) є рівняннями ланцюгової лінії, а сама поверхня є катеноїдом, чого і слід було чекати. Від значення сталих c_1, c_2 залежить розміщення і параметр форми кривої. Наприклад, якщо прийняти, що при $s=0$ початкова точка інтегрування має координати $x=0, y=y_0$, то значення сталих будуть: $c_1=1/y_0, c_2=0$, а сама крива буде розташована, як показано на рис. 2 при ($b=0$). Всі інші перерізи будуть відповідати мінімальним гвинтовим поверхням, для кожної із яких зазначено числове значення гвинтового параметра b . Рис. 2 дає можливість простежити за зміною перерізу гвинтової мінімальної поверхні по мірі збільшення її кроку. Слід зазначити, що ці перерізи подібні до кривих, отриманих в праці [7, рис. 1] при неперервному згинанні катеноїда в гвинтовий коноїд. Щоправда там відстань радіуса y_0 по мірі збільшення кроку зменшується, наближаючися до нуля, а у нас ні, оскільки початкова умова інтегрування передбачає, що $y_0=5$. Зменшуючи y_0 можна отримати всі перерізи відомих гвинтових мінімальних поверхонь. Зокрема, при

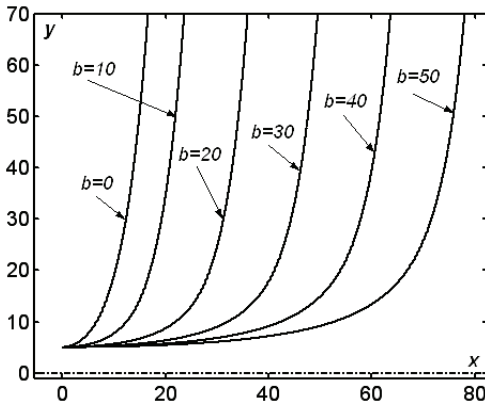


Рис. 2. Меридіональні перерізи гвинтових мінімальних поверхонь, включаючи поверхню обертання (при $b=0$).

навколо осі Ox на відстані y_0 від неї теж є поверхнею сталої середньої кривини. При цьому $\alpha=0 - const$ і середня кривина його буде рівною $H=1/2y_0$. Якщо прийняти $y = \int \sin \alpha ds = 1/y_0$, то диференціальне рівняння (11) буде задовольнятися незалежно від величини гвинтового параметра b . Це означає, що при обертанні прямої, паралельної осі Ox навколо неї ми одержимо циліндр, а при наданні прямій ще й гвинтового руху буде той самий циліндр. Такий же результат ми отримуємо при чисельному інтегруванні диференціального рівняння (11).

Випадок третій. Куля теж є поверхнею сталої середньої кривини, яка може бути утворена обертанням півкола радіуса y_0 навколо осі Ox .

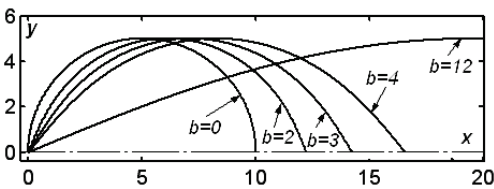


Рис. 3. Трансформація кола у переріз гвинтової поверхні в залежності від значення параметра b при заданій середній кривині $H=0,2$.

руху, то чисельне інтегрування показало, що коло певним чином трансформується, витягуючись вздовж осі Ox (рис. 3).

Випадок четвертий. Наступна поверхня обертання сталої середньої кривини – ундулоїд, переріз якої представлений на рис. 4 при $b=0$. Ця крива періодична, має певний період і амплітуду. При переході до гвинтової поверхні крива перерізу трансформується, розтягуючись вздовж осі Ox , при цьому період зростає, а амплітуда залишається сталою.

$y_0=0$ результатом чисельного інтегрування рівняння (11) при $H=0$ є пряма лінія, паралельна осі Oy , що відповідає гвинтовому коноїду. В такому випадку $\alpha=\pi/2 - const$. Незавжди пересвідчитися, що це значення кута задовольняє рівняння (11) назалежно від величини гвинтового параметра b . При $b=0$ мінімальною поверхнею буде площина, перпендикулярна осі обертання Ox , у всіх інших випадках – гвинтовий коноїд із кроком $2\pi b$.

Випадок другий. Циліндр, утворений обертанням прямої

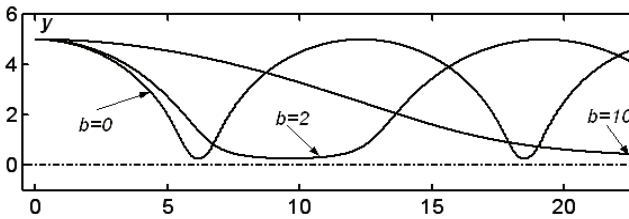


Рис. 4. Трансформація ундулоїда у переріз гвинтової поверхні в залежності від значення параметра b при заданій середній кривині $H=0,19$.

Випадок п'ятий. Остання поверхня обертання сталої середньої кривини – нодоїд, переріз якої теж є періодичною кривою і для якого характерна наявність петель. На рис. 5 представлені трансформовані перерізи гвинтових поверхонь із значенням середньої кривини $H=0,25$ при перетворенні нодоїда у гвинтову поверхню. В цьому випадку амплітуда теж залишається сталою, а період зменшується, причому величина петлі збільшується, внаслідок чого при нескінченному зростанні параметра b петлі накладаються одна на одну, зливаючись в одну.

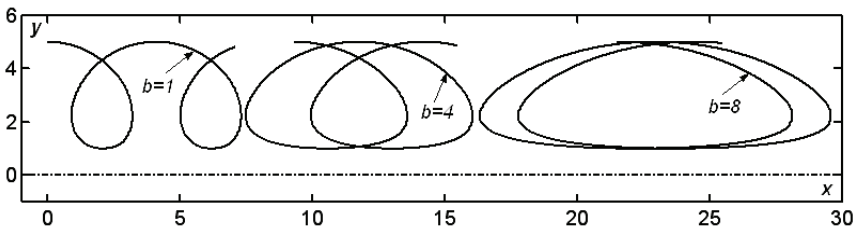


Рис. 5. Трансформація нодоїда у переріз гвинтової поверхні в залежності від значення параметра b при заданій середній кривині $H=0,25$.

Висновки. Побудовано меридіональні перерізи всіх можливих гвинтових поверхонь сталої середньої кривини. У випадку рівності нулю гвинтового параметра всі вони перетворюються у відомі поверхні обертання сталої середньої кривини. Досліджено трансформацію перерізів при перетворенні поверхонь обертання у гвинтові шляхом поступового збільшення величини гвинтового параметра, починаючи із нуля при заданій величині середньої кривини. Мінімальна поверхня обертання нульової середньої кривини – катеноїд – перетворюється у відомі гвинтові мінімальні поверхні, включаючи гвинтовий коноїд. Коловий циліндр перетворюється самий в себе. Півколо при трансформації кулі у гвинтову поверхню розтягується вздовж осі обертання Ox при незмінному максимальному значенні координати y перетворюючись в криву, подібну до дуги еліпса. Періодичні криві – перерізи ундулоїда і нодоїда – теж трансформуються при незмінній амплітуді, змінюючи при цьому крок. Якщо по мірі зростання кроку гвинтової поверхні початкова крива – переріз

ундулоїда – збільшує свій період, то друга крива – переріз нодоїда – навпаки – зменшує, внаслідок чого при нескінченному зростанні параметра b петлі витягуються, накладаються одна на одну, намагаючись злитися в одну.

Література

1. *Rossmann W.* The first bifurcation point for Delaunay nodoids / *W. Rossmann // Experimental Mathematics – Vol. 14 (2005), № 3.* – P. 331-342.
2. *Пилипака С.Ф.* Конструювання поверхонь обертання сталої середньої кривини / *С.Ф. Пилипака, І.О. Коровіна // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції „Перспективи розвитку агропромислового комплексу в Поліському регіоні України”.* – Ніжин: Міланік, 2010. –С. 35 – 43.
3. *Коровіна І.О.* Конструювання автомобільних балонів високого тиску у формі нодоїда / *І.О. Коровіна // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.* – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т. 46. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С. 134-141.
4. *Коровіна І.О.* Конструювання поверхонь обертання сталої середньої кривини на основі її меридіану / *І.О. Коровіна // Геометричне та комп'ютерне моделювання.* – Харків: ХДУХТ, 2010. – №26. – С. 128–133.
5. *Пилипака О.А.* Конструювання поверхонь обертання, у яких середня кривина змінюється в заданих межах / *О.А. Пилипака, В.М. Несвідомін // Прикладна геометрія та інженерна графіка.* –К.: КНУБА, 2011. –Вип. 88. – С. 257 – 263.
6. *Несвідомін В.М.* Конструювання гвинтових поверхонь, у яких середня кривина змінюється в заданих межах / *В.М. Несвідомін, О.А. Пилипака // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.* –Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. –Том 50. –Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – С. 41 – 47.
7. *Пилипака С.Ф.* Неперервне згинання катеноїда в гвинтовий коноїд / *С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка.* –К.: КДТУБА, 1998. –Вип. 63. –С. 80-83.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

В.М. Несвидомин, Т.С. Пилипака, О.А. Пилипака

Составлено дифференциальное уравнение меридионального сечения винтовой поверхности постоянной средней кривизны. Численными методами построено кривые сечения при трансформации поверхностей вращения у винтовые. Рассмотрено трансформацию всех известных поверхностей вращения постоянной средней кривизны у винтовые из сохранением численного значения средней кривизны.

DESIGNING OF SCREW SURFACES OF CONSTANT MEAN CURVATURE

V. Nesvidomin, T. Pylypaka, O. Pylypaka

The differential equation of meridional cut of a screw surface of constant mean curvature is made. By numerical methods it is constructed curve cuts at transformation of surface of revolutions at the screw. It is considered transformation of all known surface of revolutions of constant mean curvature at screw of preservation of numerical value of mean curvature.