

## ІНТЕРАКТИВНИЙ СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ЦИКЛІЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ДУФФІНГА

*Національний університет цивільного захисту України, м. Харків  
НТУ «Харківський політехнічний університет», Україна*

*Розглянуто графоаналітичний спосіб визначення коефіцієнтів рівняння Дуффінга, які б забезпечили  $2\pi$ -циклічний характер його розв'язку.*

**Постановка проблеми.** На практиці під час дослідження системи на хаотичні коливання за допомогою відображення Пуанкаре, варто спробувати змінити один або більше число параметрів, що визначають її стан. Наприклад, можна міняти амплітуду зовнішньої сили збурення, або її частоту. Мета цієї процедури - з'ясувати, чи не виявляє система стаціонарного або періодичного поведіння в деякій області простору параметрів [1, 2]. Таким чином, можна переконатися, що система, дійсно детермінована й не містить схованих зовнішніх або внутрішніх джерел істинно випадкового «шуму».

**Огляд літературних джерел.** Згідно [3] перелічимо класи структур, що зустрічаються у відображеннях Пуанкаре. Дискретний набір точок вказує на періодичний характер коливання. Замкнута крива вказує на квазіперіодичний рух спричинений декількома частотами непорівнянних величин. У випадку незамкнутої кривої має сенс моделювати процес одномірним відображенням шляхом побудови  $x(t)$  як функції  $x(t + T)$ .

Безформний набір точок може свідчити про те, що: а) динамічна система має або сильні випадкові сигнали, або шум на вході; б) наявний дивний аттрактор, але дисипація в системі дуже слабка - для перевірки необхідно використати показник Ляпунова; г) відбувається квазіперіодичний рух із трьома або більшим числом домінуючих непорівнянних за величиною частот.

Для практичних впроваджень необхідно намагатися підібрати такий набір параметрів, які б забезпечили динамічній системі *відмежування від хаотичного стану*. Ознакою слабкої хаотичності може служити наявність циклічних фазових траєкторій розв'язків рівняння Дуффінга.

Тому мета подальших геометричних досліджень полягатиме у визначенні значень параметрів рівняння Дуффінга, які б дозволили запобігти хаотичності.

**Постановка завдання.** Розглянути графоаналітичний спосіб визначення коефіцієнтів рівняння Дуффінга, які б забезпечили  $2\pi$ -циклічний характер його розв'язку.

**Основна частина.** Спочатку розглянемо рівняння Дуффінга вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} - bx + cx^3 = 0. \quad (1)$$

Шукати будемо  $2\pi$ -періодичний розв'язок рівняння (1) при початкових умовах  $x(0) = F$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ , де  $F$  - амплітуда коливань.

Умова  $\dot{x}(0) = 0$  вказує на парний характер розв'язку рівняння. З урахуванням того, що парні і непарні розв'язки будуть розрізнятися лише фазовим зсувом, то розв'язок рівняння (1) будемо у вигляді ряду Фур'є по косинусам непарних гармонік:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A_n \cos((2n+1)t). \quad (2)$$

Цим задовольняється початкова умова  $\dot{x}(0) = 0$  і умова  $2\pi$ -періодичності розв'язку. Підстановка (2) в рівняння (1) дає систему з  $N+1$  алгебраїчного рівняння відносно  $N+1$  коефіцієнта Фур'є:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (-A_n \cos((2n+1)t)(2n+1)^2) + a \sum_{n=0}^N (-A_n \sin((2n+1)t)(2n+1)) + \\ + b \sum_{n=0}^N (A_n \cos((2n+1)t)) - c \left( \sum_{n=0}^N (A_n \sin((2n+1)t)) \right)^3 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Урахування початкової умови  $x(0) = F$  дозволяє одержати додаткове рівняння для коефіцієнтів Фур'є  $A_0 = F - \sum_{n=1}^N A_n$ . Тоді, для досягнення умови «кількість рівнянь дорівнює кількості змінних», систему (3) можна доповнити ще і додатковою змінною – одним із коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  чи  $c$ . Останнє зауваження дозволяє визначати коефіцієнти рівняння Дуффінга, які забезпечать циклічний характер його розв'язку.

Пояснимо це на прикладі вибору значення параметра  $c$ . Для цього в інтерактивному режимі, за допомогою Атласу фазових портретів [4-7], обираються наближені величини  $a$ ,  $b$  і  $c$  так, щоб фазова траєкторія «нагадувала» шукану циклічну. Тоді розв'язуємо систему рівнянь (3), враховуючи початкове значення  $c = c_0$ .

Викладене реалізовано за допомогою складеної Maple- програми, де через  $N = 21$  позначено кількість членів у розкладі Фур'є.

Спочатку описуються розв'язок і його похідні:

```

x := sum('A[n]*cos((2*n+1)*t)', 'n'=0..N);
x := A0 cos(t) + A1 cos(3 t) + A2 cos(5 t) + A3 cos(7 t) + A4 cos(9 t) + A5 cos(11 t)
    + A6 cos(13 t) + A7 cos(15 t) + A8 cos(17 t) + A9 cos(19 t) + A10 cos(21 t)
    + A11 cos(23 t) + A12 cos(25 t) + A13 cos(27 t) + A14 cos(29 t) + A15 cos(31 t)
    + A16 cos(33 t) + A17 cos(35 t) + A18 cos(37 t) + A19 cos(39 t) + A20 cos(41 t)
    + A21 cos(43 t)

```

```

xt := diff(x, t);
xt := -A0 sin(t) - 3 A1 sin(3 t) - 5 A2 sin(5 t) - 7 A3 sin(7 t) - 9 A4 sin(9 t)
    - 11 A5 sin(11 t) - 13 A6 sin(13 t) - 15 A7 sin(15 t) - 17 A8 sin(17 t)
    - 19 A9 sin(19 t) - 21 A10 sin(21 t) - 23 A11 sin(23 t) - 25 A12 sin(25 t)
    - 27 A13 sin(27 t) - 29 A14 sin(29 t) - 31 A15 sin(31 t) - 33 A16 sin(33 t)
    - 35 A17 sin(35 t) - 37 A18 sin(37 t) - 39 A19 sin(39 t) - 41 A20 sin(41 t)
    - 43 A21 sin(43 t)

```

```

xtt := diff(x, t, t);
xtt := -A0 cos(t) - 9 A1 cos(3 t) - 25 A2 cos(5 t) - 49 A3 cos(7 t) - 81 A4 cos(9 t)
    - 121 A5 cos(11 t) - 169 A6 cos(13 t) - 225 A7 cos(15 t) - 289 A8 cos(17 t)
    - 361 A9 cos(19 t) - 441 A10 cos(21 t) - 529 A11 cos(23 t) - 625 A12 cos(25 t)
    - 729 A13 cos(27 t) - 841 A14 cos(29 t) - 961 A15 cos(31 t) - 1089 A16 cos(33 t)
    - 1225 A17 cos(35 t) - 1369 A18 cos(37 t) - 1521 A19 cos(39 t) - 1681 A20 cos(41 t)
    - 1849 A21 cos(43 t)

```

В результаті одержуємо наближене представлення рівняння (1):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} := \mathbf{xtt} = \mathbf{a} * \mathbf{xt} + \mathbf{b} * \mathbf{x} - \mathbf{c} * \mathbf{x}^3; \\
 f := \left( \sum_{n=0}^N (-A_n \cos((2n+1)t) (2n+1)^2) \right) + w^2 \left( \sum_{n=0}^N (-A_n \sin((2n+1)t) (2n+1)) \right) \\
 + b \left( \sum_{n=0}^N A_n \cos((2n+1)t) \right) - c \left( \sum_{n=0}^N A_n \cos((2n+1)t) \right)^3
 \end{aligned}$$

Далі формуються елементи матриці:

```

unassign('t'): t;
for i from 0 to N do
t := evalf(2*Pi*i/N):
f[i] := evalf(xtt = a*xt + b*x - c*x^3):
end do:

```

та обчислюється один з них, враховуючи початкову умову  $x(0) = F$ :

```

A[0] := F - sum('A[n]', 'n'=1..N);
A0 := 0.815 - A1 - A2 - A3 - A4 - A5 - A6 - A7 - A8 - A9 - A10 - A11 - A12 - A13 - A14 - A15
    - A16 - A17 - A18 - A19 - A20 - A21

```

Для числового розв'язання системи рівнянь було обрано початкові значення – для коефіцієнтів  $\mathbf{A}[i] = 0.1$ , і для параметра  $\mathbf{c}=3$ . Шуканий результат одержуємо після розв'язання системи рівнянь за допомогою оператора:

```
sol := fsolve({seq(f[i], i=0..N)},
              {seq(A[i] = 0.1, i=1..N), c=c0});
sol := {c = 2.5, A16 = 0.464190899110-6, A18 = 0.170710035310-5, A20 = 0.01008557580
        A6 = 0.709807338610-5, A4 = -0.655670580510-5, A5 = 0.606672372310-5,
        A3 = -0.00001684835921, A2 = 0.00005279642507, A15 = -0.752757900610-6,
        A13 = -0.116987314510-5, A11 = 0.144004079710-5, A9 = -0.212319531610-5,
        A8 = -0.462077105710-5, A7 = 0.382991639810-5, A19 = 0.0002082622271
        A21 = -0.009238605411, A17 = 0.706246409710-6, A1 = 0.002664188167
        A10 = -0.126824819110-8, A12 = 0.213269333210-5, A14 = -0.140044133010-5}
assign(sol); seq(A[i], i=1..N);
B1 = 0.002664188167 B2 = 0.00005279642507 B3 = -0.00001684835921
        B4 = -0.655670580510-5, B5 = 0.606672372310-5, B6 = 0.709807338610-5,
        B7 = 0.382991639810-5, B8 = -0.462077105710-5, B9 = -0.212319531610-5,
        B10 = -0.126824819110-8, B11 = 0.144004079710-5, B12 = 0.213269333210-5,
        B13 = -0.116987314510-5, B14 = -0.140044133010-5, B15 = -0.752757900610-6,
        B16 = 0.464190899110-6, B17 = 0.706246409710-6, B18 = 0.170710035310-5,
        B19 = 0.0002082622271 B20 = 0.01008557580 B21 = -0.009238605411
```

Але ці значення одержано у форматі рядка. Для переводу їх в числовий формат використаємо цикл:

```
for i from 0 to N do
B[i] := convert(A[i], float);
end do;
cc := convert(c, float).
```

Для утворення одержаного результату необхідно підставити знайдені коефіцієнти в обране наближення розв'язку:

```
xx := sum('B[n]*cos((2*n+1)*t)', 'n'=0..N);
xx := 0.8112378114cos(t) + 0.002664188167cos(3 t) + 0.00005279642507cos(5 t)
      - 0.00001684835921cos(7 t) - 0.655670580510-5 cos(9 t)
      + 0.606672372310-5 cos(11 t) + 0.709807338610-5 cos(13 t)
      + 0.382991639810-5 cos(15 t) - 0.462077105710-5 cos(17 t)
```

$$\begin{aligned}
& -0.212319531610^{-5} \cos(19 t) - 0.126824819110^{-8} \cos(21 t) \\
& + 0.144004079710^{-5} \cos(23 t) + 0.213269333210^{-5} \cos(25 t) \\
& - 0.116987314510^{-5} \cos(27 t) - 0.140044133010^{-5} \cos(29 t) \\
& - 0.752757900610^{-6} \cos(31 t) + 0.464190899110^{-6} \cos(33 t) \\
& + 0.706246409710^{-6} \cos(35 t) + 0.170710035310^{-5} \cos(37 t) \\
& + 0.0002082622271 \cos(39 t) + 0.01008557580 \cos(41 t) - 0.00923860541 \cos(43 t) .
\end{aligned}$$

На рис. 1 наведено графік одержаного розв'язку, побудованого за допомогою програми:

```

plot(xx, t=0..2*Pi, numpoints=1000, color=red,
axes=BOXED, thickness=3, axesfont=[TIMES, ITALIC, 14]);

```

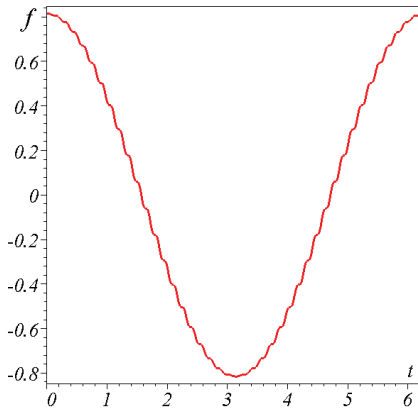


Рис. 1. Графік наближеного розв'язку рівняння Дуффінга при  $N=21$

Графік одержаного розв'язку має «сходинокоподібний» характер, фрагментами якого є «горизонтальні» ділянки. Про це свідчить графік похідної розв'язку (рис. 2), побудований за допомогою програми:

```

dxx := diff(xx, t);

```

$$\begin{aligned}
dxx := & -0.8112378114 \sin(t) - 0.00799256450 \sin(3 t) - 0.0002639821254 \sin(5 t) \\
& + 0.0001179385145 \sin(7 t) + 0.00005901035224 \sin(9 t) \\
& - 0.00006673396095 \sin(11 t) - 0.00009227495402 \sin(13 t) \\
& - 0.00005744874597 \sin(15 t) + 0.00007855310797 \sin(17 t) \\
& + 0.0000403407110 \sin(19 t) + 0.266332120110^{-7} \sin(21 t) \\
& - 0.00003312093833 \sin(23 t) - 0.0000533173333 \sin(25 t) \\
& + 0.00003158657492 \sin(27 t) + 0.00004061279857 \sin(29 t) \\
& + 0.00002333549492 \sin(31 t) - 0.00001531829967 \sin(33 t) \\
& - 0.00002471862434 \sin(35 t) - 0.00006316271306 \sin(37 t) \\
& - 0.008122226857 \sin(39 t) - 0.4135086078 \sin(41 t) + 0.3972600327 \sin(43 t)
\end{aligned}$$

```

plot(dxx, t=0..2*Pi, numpoints=1000,
color=red, axes=BOXED,
thickness=3, axesfont=[TIMES, ITALIC, 14]);

```

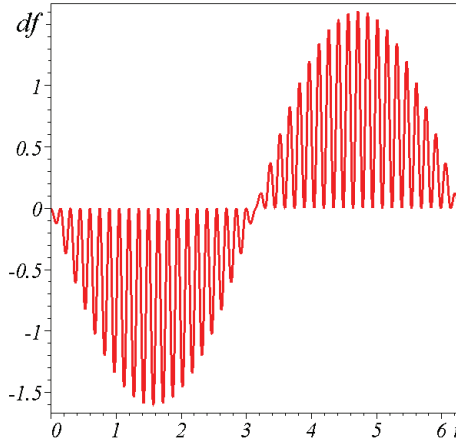


Рис. 2. Графік похідної розв'язку рівняння Дуффінга при  $N=21$

Для порівняння, на рис. 3, наведено графіки розв'язків, одержаних «штатними» операторами процесора maple.

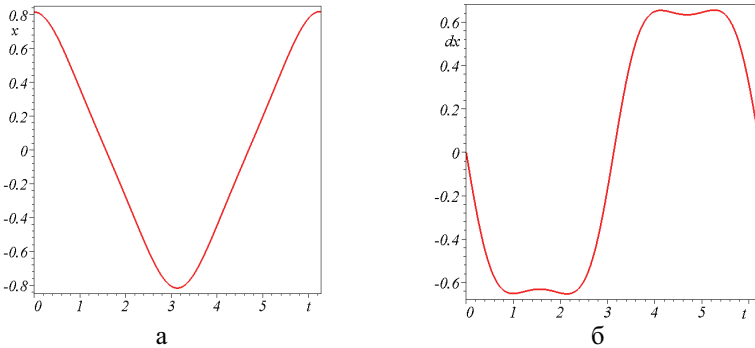


Рис. 3. Для рівняння Дуффінга (1) з параметрами  $a=0.002; b=0.4; c=2.5; F=0.815$ : наведено графіки: а - розв'язку б - похідної

Приклад 1. В інтерактивному режимі обираються параметри  $a = 0,002$ ;  $b = 0,4$ ;  $c = 2,5$ ;  $F = 0,815$ . На рис. 4а наведено фазову траєкторію, відповідну цим параметрам при  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Систему рівнянь (3) розв'язано з початковими значеннями  $c_0=2,5$  і  $A_k=0$  ( $k=0..36$ ). Після розв'язання одержано  $c = 3$  (рис. 4б).

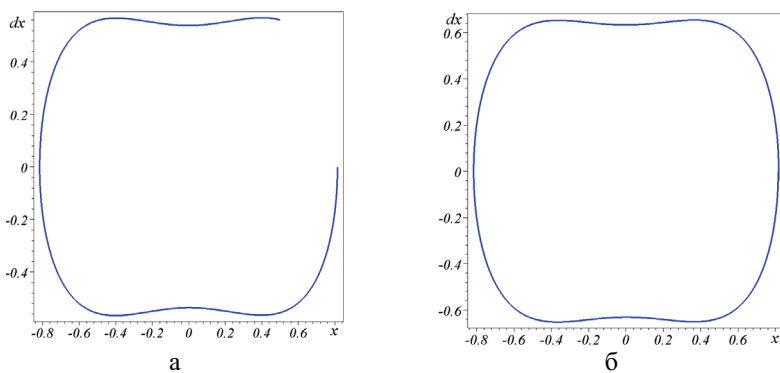


Рис. 4. Фазові траєкторії рівняння (2.5): а - при  $c=2,5$ ; б - при  $c=3$

Далі розглянемо рівняння Дуффінга, де враховується амплітуда  $F$  і частота  $\omega$  зовнішньої дії.

**Приклад 2.** На рис. 5а при  $0 \leq t \leq 2\pi$  наведено фазову траєкторію для параметрів  $a=0,002$ ;  $b=0,4$ ;  $c=7$ ;  $w=1$ ;  $F=0,815$ . Відповідну до цього випадку систему рівнянь (3) розв'язано з початковими значеннями  $c_0 = 7$  і  $A_k = 0$  ( $k = 0..36$ ). Після розв'язання одержано  $c = 5,87$  (рис. 5б).

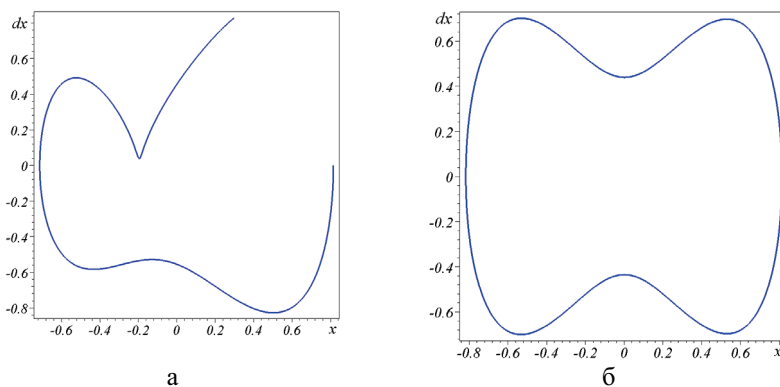


Рис. 5. Фазові траєкторії рівняння: а - при  $c=7$ ; б - при  $c = 5,87$

Також було проведено обчислення розкладу Фур'є для  $N = 49$ . Розрахунки показали незмінний характер розв'язку. Таким чином, розглянутий спосіб дозволяє визначати лише циклічність розв'язку, не обчислюючи самого розв'язку. Це важливо при розв'язанні практичних задач при впровадженнях [4-7].

Механічні системи з проклацуванням можна розглядати як динамічні системи зі зворотним зв'язком [8]. Для цього було розв'язано систему диференціальних рівнянь третього порядку зі змінними  $x$ ,  $v$  і  $\lambda$ :

$$\frac{dx}{dt}=v; \quad \frac{dv}{dt} = -(\lambda - 1)x - x^3 + \mu \frac{dx}{dt} \left( \frac{dx}{dt} - 1 \right) \left( \frac{dx}{dt} + 1 \right); \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\varepsilon\lambda + x^2, \quad (4)$$

Для існування граничного циклу фазових траєкторій рівнянь Дуффінга при  $\varepsilon = 0,01$  і  $\mu = 0,24$  було розглянуто наступні початкові умови:  $x_0 = -0,32$ ;  $v_0 = 0,12$ ;  $\lambda_0 = 1,1$ . В результаті було одержано параметри однообертового циклу, що дозволило унаочнити відповідну фазову траєкторію (рис. 6).

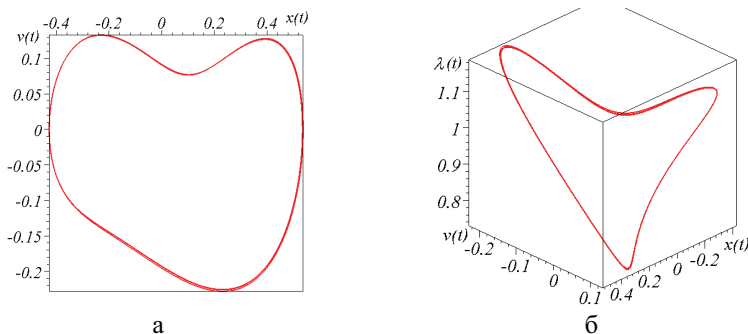


Рис. 6. Приклад однообертового циклу рівняння Дуффінга.

На рис. 7 зображено двообертовий цикл, одержаний при  $\varepsilon = 0,1$  і  $\mu = 0,255$  і з початковими умовами  $x_0 = -0,028$ ;  $v_0 = 0,082$   $\lambda_0 = 0,91$ .

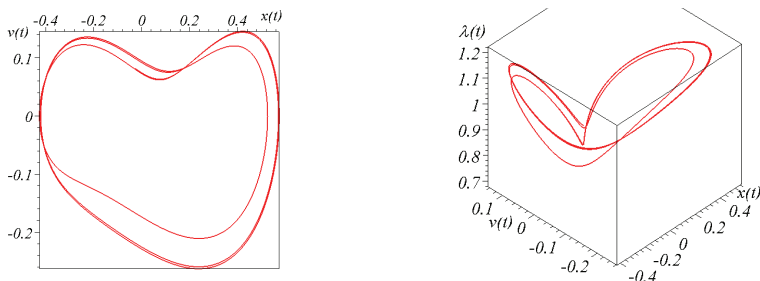


Рис. 7. Приклад двообертового циклу рівняння Дуффінга

**Висновок.** Розроблено графоаналітичний спосіб пошуку  $2\pi$ -періодичних орбіт рівняння Дуффінга, що дозволило визначати такі параметри рівняння Дуффінга, які унеможливають хаотичність їх розв'язків.

## Література

1. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой. / Анищенко В.С. Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 144 с.



2. Анищенко В.С. Динамические системы. Соросовский образовательный журнал / Анищенко В.С. // № 11, 1997. С. 77 – 84

3. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. / Мун Ф. – М.: Мир, 1990. – 312 с.

4. Грінченко Є.М. Геометричне моделювання динаміки системи рівнянь Лоренца / Грінченко Є.М. // Геометричне та комп'ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2006. – Вип.14. – С. 139-149.

5. Грінченко Є.М. Геометричне моделювання розв'язків диференціальних рівнянь типу Дуффінга / Грінченко Є.М., Пікрасов М.М. // Геометричне та комп'ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2007.– Вип.16.– С. 146-153.

6. Грінченко Е.Н. Использование уравнения Дуффинга для исследования виброзащитной системы с квазиулевым жесткостью / Грінченко Е.Н., Пікрасов М.М. // Геометричне та комп'ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип.17.–С. 268-277.

7. Грінченко Є.М. Геометричне моделювання взаємної нестійкості фазових траєкторій неавтономного рівняння Дуффінга / Грінченко Є.М., Ткаченко В.П. // Геометричне та комп'ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип.18. – С. 221-228.

8. Крюков Б.И. О «странном» поведении решений уравнения Дуффинга. / Крюков Б.И., Середович Г.И. // ДАН СССР. 1981. т.258, № 2, С.311-314.

## **ИНТЕРАКТИВНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА**

*М. М. Пикрасов, И. Ю. Адашевская, Н. А. Дригваль*

Рассмотрен графоаналитический способ определения коэффициентов уравнения Дуффинга, которые бы обеспечили  $2\pi$  - циклический характер его решения.

## **INTERACTIVE METHOD OF DETERMINATION CYCLICAL SOLUTIONS OF THE DUFFING'S EQUATION**

*M. M. Piksasov, I. U. Adashevskaya, N. A. Drigval*

The graphic with analytical method of determination of coefficients of Duffing's equation which would provide  $2\pi$  -cyclical character of its decision is considered.