УДК 514.18

С. І. Пустюльга, д.т.н.,
В. Р. Самостян, к.т.н.,
А. А. Хомич

ДИСКРЕТНЕ ВЕКТОРНЕ ФОРМУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ЕКВІДИСТАНТНИХ КРИВИХ

Луцький національний технічний університет, Україна

В роботі запропоновано алгоритм формування дискретних моделей еквідистантних та квазіеквідистантних кривих за допомогою математичного апарату дискретних векторних полів.

Постановка проблеми. Проблема побудови еквідистантних ліній для плоских контурів має важливе значення у різних областях техніки, насамперед, при створенні програм для верстатів з числовим програмним управлінням (ЧПУ), у проектуванні трасування комп'ютерних плат, при розробці елементів моделей трубопроводів, при прогнозуванні розповсюдження пожеж та інших природних явищ, при моделюванні процесів розсипання сипучих матеріалів і.т.і. [1]. Від так розробка нових ефективних алгоритмів побудови еквідистантних як замкнутих, так і незамкнутих кривих ліній, удосконалення вже відомого математичного апарату побудови кривих даного класу є на сучасному етапі достатньо актуальним завданням.

Аналіз останніх досліджень. Розробці алгоритмів побудови еквідистантних та квазіеквідистантних кривих у неперервному вигляді присвячено достатньо наукових робіт, у тому числі і розробок вчених, що працюють в галузі прикладної геометрії [2, 3]. В опублікованих роботах алгоритми побудови еквідистантних кривих тісно пов'язувались із диференціальними характеристиками базових кривих, необхідністю видалення петель еквідістанти на певних ділянках, а відтак розроблювані моделі мають достатньо громіздкий математичний опис. Разом із тим застосування методів дискретної геометрії при розв'язанні задач побудови еквідистантних моделей кривих може суттєво підвищити ефективність алгоритмів та зменшити їх трудомісткість, якщо враховувати дискретний характер роботи спеціалізованих математичних пакетів ЕОМ. Крім того більшість кривих, які використовуються у техніці не є гладкими, а мають кусково-лінійний характер. Тому саме дискретне представлення моделей еквідистантних кривих заслуговує на увагу. В існуючій геометричній літературі з дискретного геометричного моделювання ДПК задачі побудови дискретних аналогів еквідистанти практично не ставились і відповідно не розв'язувались.

Формування цілей роботи. Метою даної роботи є розробка простих, наочних та ефективних алгоритмів для побудови дискретних моделей еквідистантних та квазіеквідистантних кривих.

Основна частина. Еквідистантою кривої називають множину кінців рівних відрізків відкладених в певному напрямку на нормалях до даної кривої. По аналогії з неперервною геометрією, дискретну модель еквідистанти до вже заданої дискретної моделі кривої, яка представляє собою множину точок разом з супровідною ламаною, будемо вважати геометричне місце точок з'єднаних супровідною ламаною, кожна із яких лежить на дискретному аналогу нормалі до заданої ДПК і на заданій відстані (рис.1).

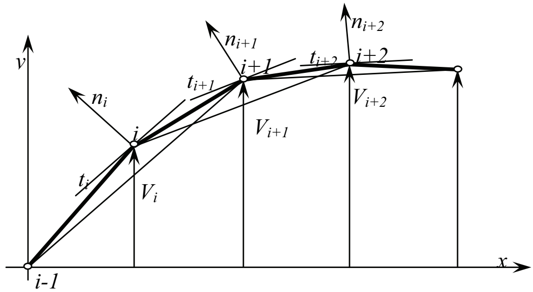

Рис. 1

Нехай заданий дискретний набір точок на рівномірній сітці вздовж осі x (рис. 1). В роботі [5], в основу якої покладена робота [4], було запропоновано метод формування або впорядкування такої множини за допомогою дискретного векторного поля. Дискретно представлені елементи векторного поля V_i подаються як здвиг точок, що визначається деяким перетворенням A_i, на заданій дискретній множині. Для двовимірного простору кінці векторів V_i дискретного векторного поля, побудованого на дискретній множині точок одновимірної числової осі, визначають дискретну модель плоскої кривої із певними геометричними характеристиками.

Найпростіший вигляд залежності між трьома сусідніми векторами V_i, які будуть упорядковувати дискретну множину точок, можна подати у вигляді:

$$V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1} = -A_i, \qquad (1)$$

де V_i - елементи дискретного векторного поля,

A_i - функціональна залежність між елементами дискретного векторного поля.

Склавши та розв'язавши систему лінійних рівнянь виду (1) отримаємо дискретну модель кривої з рівномірним кроком елементів на заданому інтервалі, яка формується за допомогою дискретного векторного поля з певною залежністю A_i між його елементами.

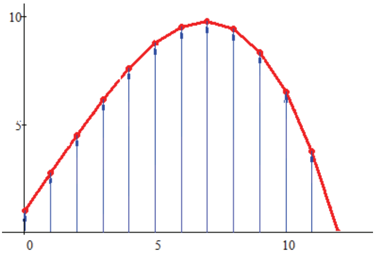

Рис. 2

Для побудови дискретної моделі еквідистанти необхідно визначити певні геометричні характеристики базової ДПК. Під дискретним аналогом дотичної t_i (рис. 1) у вузлі ДПК будемо вважати пряму, що проходить через цей вузол і є паралельною до прямої, яка з'єднує суміжні із заданим вузли $i-1$ та $i+1$. Дискретний аналог дотичної у будь-якому вузлі визначається рівнянням:

$$a_i x - b_i y + y_i\left(x_{i+1} - x_{i-1}\right) - x_i\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) = 0, \qquad (2)$$

де $a_i = y_{i+1} - y_{i-1}$, $\qquad b_i = x_{i+1} - x_{i-1}$.

Дискретний аналог нормалі n_i (рис. 1) у вузлі є перпендикуляр до дискретного аналога дотичної у заданому вузлі. Рівняння дискретного аналога нормалі у вузлах базової ДПК, враховуючи (2), можна подати у вигляді:

$$a_i\left(y - y_i\right) - b_i\left(x - x_i\right) = 0. \qquad (3)$$

Відповідно до (3) вектор нормалі у кожному вузлі ДПК буде мати координати $n_i\left[a_i, b_i\right]$. Довжину вектора n_i представимо:

$$\left|n_i\right| = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}.$$

Якщо прийняти, що одинична довжина вектора n_i відповідно дорівнює $n_i\left(\dfrac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \dfrac{b_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}\right)$, то при заданому фіксованому або функціонально розподіленому Δ_i (величина відхилення точок моделі еквідистанти від точок базової ДПК) у вузлах результуючий нормальний вектор буде мати координати:

$$n_i\left(\frac{a_i \Delta_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \frac{b_i \Delta_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}\right). \qquad (4)$$

Геометричне місце точок, яке належатиме майбутній дискретній моделі еквідистанти до заданої ДПК можна представити як векторне перетворення визначеного напряму точок базової ДПК у точки еквідистанти:

$$xe_i = x_i \pm \frac{\Delta_i \cdot a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \qquad ye_i = y_i \pm \frac{\Delta_i \cdot b_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \qquad (5)$$

При такому трактуванні дискретної множини точок, що належать еквідистанті, геометричну модель формоутворюючого векторного поля можна представити системою лінійних рівнянь виду:

$$\begin{cases} VE_{i-1}^x - 2VE_i^x + VE_{i+1}^x = -AE_i^x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ VE_{i-1}^y - 2VE_i^y + VE_{i+1}^y = -AE_i^y \end{cases} \qquad (6)$$

Враховуючи вирази (4) та (5) перетворення множини точок базової ДПК в точки дискретної моделі еквідистанти відбувається за сумою векторів координатних складових $V_i^x + n_i^x = -A_i^x$ *та* $V_i^y + n_i^y = -A_i^y$

де $A_i^x = 2x_i - x_{i+1} - x_{i-1} + 2\dfrac{\Delta_i \cdot a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} + \dfrac{\Delta_i \cdot a_{i+1}}{\sqrt{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} + \dfrac{\Delta_i \cdot a_{i-1}}{\sqrt{a_{i-1}^2 + b_{i-1}^2}}$,

$$A_i^y = 2y_i - y_{i+1} - y_{i-1} + 2\frac{\Delta_i \cdot b_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} - \frac{\Delta_i \cdot b_{i+1}}{\sqrt{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} - \frac{\Delta_i \cdot b_{i-1}}{\sqrt{a_{i-1}^2 + b_{i-1}^2}}.$$

Векторне поле, що формує шукану еквідистанту визначається із системи (6).

Побудову дискретної моделі еквідистанти до базової ДПК за визначеним алгоритмом наведено на рис. 3.

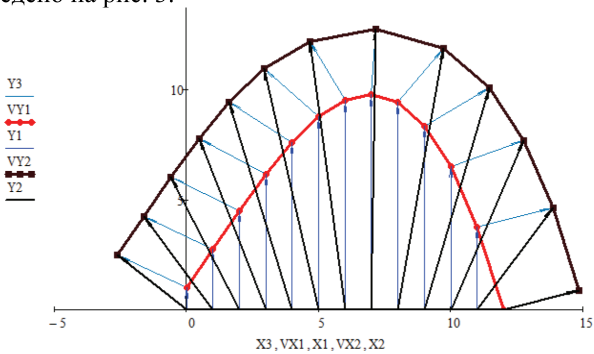

Рис. 3.

У роботі [1] визначено, що якщо величину Δ_i прийняти функціонально розподіленою і підставити у вирази A_i^x та A_i^y, то отримаємо дискретну модель квазіеквідистантної кривої, точки якої знаходяться на нормалях до базової ДПК з функціонально змінним кроком. Модель дискретного аналога квазіеквідистантної кривої до заданої, з лінійною зміною величини Δ_i, наведено на рис. 4.

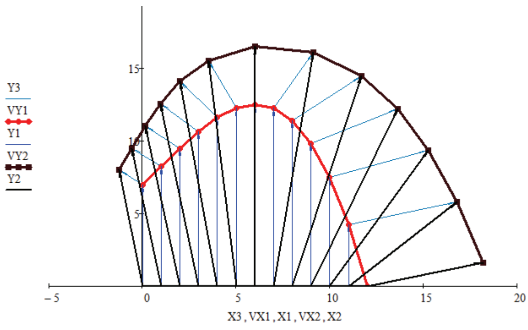

Рис.4.

Очевидно, що запропонований алгоритм формування дискретних моделей еквідистантних та квазіеквідистантних кривих не зміниться, якщо геометрична множина точок вихідної ДПК розташована на сітці з нерівномірним кроком вузлів.

Висновки. У даній роботі запропоновано алгоритм формування дискретних моделей еквідистантних та квазіеквідистантних кривих за допомогою математичного апарату дискретних векторних полів. Майбутні дослідження пов'язані з розробкою алгоритмів формування дискретних моделей еквідистант та квазіеквідистант замкнутих кривих.

Література

1. *Гозбенко В.Е., Лыткина Е.М.* Использование эквидистант для решения прикладных задач управления техническими системами. – Иркутск : ИрГУПС, 2010. – 188 с.: ил.
2. *Шоман О.В.* Паралельні множини в геометричному моделюванні явищ і процесів: Монографія .- Харків: НТУ «ХПІ», 2007.-288с.
3. *Черніков О.В.* Визначення відстаней між елементами сім'ї квазі-еквідистантних нормально-зсунутих кривих //Геометричне та комп'ютерне моделювання: Зб. наук. праць – Харків: ХДУХТ, 2006. - Вип. 15. - С. 78-82.
4. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дис…докт. техн. Наук. 05.01.01/М.:МАИ, 1986.-348с.
5. *Пустюльга С.І.* Дискретне векторне формування геометричних об'єктів. VIII наук.-практ. конф. в Сімферополі "Геометричне та комп'ютерне моделювання. Прикладна геометрія та інженерна графіка": Зб. наук. пр. - К., 2011. - Вип. 88. – С. 271-278

ДИСКРЕТНОЕ ВЕКТОРНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ЭКВИДИСТАНТНЫХ КРИВЫХ.

***С. И. Пустюльга, В.Р. Самостян, А.А. Хомич*.**

В работе предложен алгоритм формирования дискретных моделей эквидистантных и квазиэквидистантных кривых с помощью математического аппарата дискретных векторных полей.

DISCRETE VECTORIAL FORMING OF MODELS OF EKVIDISTANTNYKH CURVES.

S. Pustylga, V. Samostyan, A. Homych

The algorithm of forming of discrete models of ekvidistantnykh and kvaziekvidistantnykh curves is in-process offered by the mathematical vehicle of the discrete vector fields.