

## ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ПОКРИТТЯ З ПЛАНАМИ У ФОРМІ КІЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

*Луцький національний технічний університет, Україна*

*В роботі досліджено формування двовимірних образів статико-геометричним методом з проєкціями на горизонтальну площину у формі кільцевого сектора з функціонально змінним кроком вузлів у радіальному напрямі. Отримано відповідні обчислювальні шаблони та запропоновано алгоритм побудови дискретно представлених зрівноважених поверхонь в циліндричній системі координат.*

**Постановка проблеми.** Дискретне представлення кривих ліній і поверхонь знайшло широке застосування в практиці геометричного моделювання завдяки простому аналітичному представленню та ефективним алгоритмам для проведення розрахунків на ЕОМ.

Більшість видовищних споруд, таких як арени, стадіони, галереї, тощо не прямокутні в плані. Тому для створення моделі покриття на декартовій прямокутній сітці, доводиться ускладнювати обчислювальні алгоритми у зв'язку з нерегулярною структурою елементів у приконтурних ділянках. Спростити алгоритми формування можна за рахунок переходу до відповідних криволінійних систем координат та використання сітки зі структурою, яка відповідає горизонтальній проєкції покриття.

У зв'язку з цим, актуальними є дослідження, пов'язані з розширенням моделюючих можливостей статико-геометричного методу [1] формування двовимірних дискретних об'єктів на основі розробки алгоритмів дискретного представлення поверхонь, геометрія яких в плані ефективніше описується в полярній системі координат, ніж в прямокутній декартовій.

На відміну від декартової, полярна система координат має особливу точку – полюс. Тому при розв'язанні задач, на основі апроксимації диференціальних рівнянь, при наближенні до полюса системи доводиться збільшувати густоту сітки з метою забезпечення необхідної точності моделі. В зв'язку з цим, актуальною є задача формування сітки, крок вузлів якої у радіальному напрямку змінюється за певним законом. Це дозволить збільшувати густоту вузлів, а отже і об'єм дискретної інформації про поверхню по мірі наближення до полюса системи координат, зберігаючи при цьому необхідну точність, та навпаки, при віддаленні від особливої точки зменшувати густоту вузлів моделі поверхні, звільняючись від зайвої інформації яка не впливає на точність дискретної моделі. Крім цього, можливість управління густотою дискретної сітки в радіальному напрямку дозволяє розширити коло задач моделювання та формування, які можна розв'язувати за допомогою алгоритмів прикладної геометрії.

**Аналіз останніх досліджень.** Способам дискретного представлення кривих ліній та поверхонь, питанням управління їх формою присвячено ряд робіт вчених, що працюють в області прикладної геометрії.

Однак, на наш погляд, у проаналізованих роботах недостатньо досліджені способи моделювання дискретно представлених поверхонь, план яких можна сформулювати з використанням криволінійних систем координат. В роботі [2] було запропоновано спосіб дискретного моделювання одновимірних образів у полярній системі координат, як плоских елементів довільної просторової форми. В роботі [3] запропоновано спосіб формоутворення дискретно представлених поверхонь з планами у формі кільцевого сектора з рівномірними кроками вузлів в коловому та радіальному координатних напрямках. Проте задача формування зрівноваженої сітки поверхні, яка в плані має форму кільцевого сектора та нерівномірний кроком вузлів у радіальному напрямку є актуальною і потребує дослідження.

**Метою роботи** є розробка алгоритму формоутворення дискретно представлених зрівноважених двовимірних образів у циліндричній системі координат, план яких має форму кільцевого сектора та функціонально змінний крок вузлів у радіальному напрямку.

**Основна частина.** Розіб'ємо проекцію поверхні в плані у формі кільцевого сектора на систему вузлів та зв'язків між ними в коловому напрямку від  $0^\circ$  до  $\omega$  з постійним кроком  $\varepsilon$ , а в радіальному – від  $r_0$  до  $R$  з кроком, який змінюється за певним законом (рис. 1).

Використаємо позначення вузлів та елементів прийняте в [3], та за аналогією розглянемо рівновагу структурних елементів (рис. 2) сітки. В результаті, для випадку змінного кроку в радіальному напрямку, залежності (1), (2), (3) та (4) в [3] залишаються без змін.

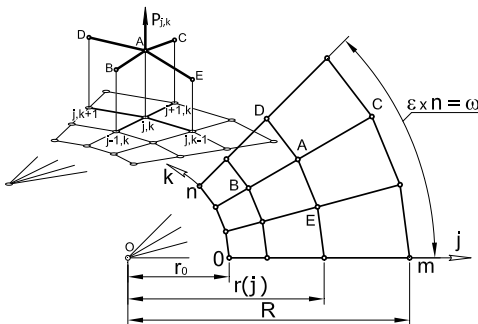


Рис. 1. Параметри плану поверхні зі змінним кроком вузлів по напрямку  $j$

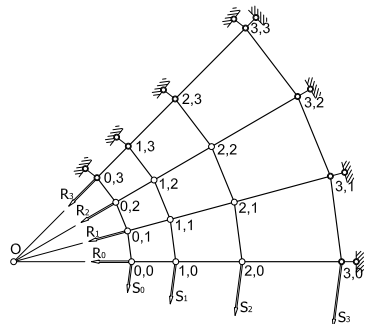


Рис. 2. Структура сітки зрівноваженої зовнішніми силами

Нехай вузли у радіальному напрямку розміщуються за експоненціальною залежністю, тоді радіус вектор довільного вузла в радіальному напрямку визначається за формулою:

$$r_j = r_0 e^{\delta j}. \quad (1)$$

Параметр  $\delta$  виразу (1) визначається з умови  $R = r_0 e^{\delta m}$ , звідки:

$$\delta = \frac{1}{m}(\ln(R) - \ln(r_0)). \quad (2)$$

Довжини проєкцій елементів сітки в коловому та радіальному напрямках з врахуванням (1), обчислюються за формулами:

$$Lr_j = r_0 e^{\delta j} (e^\delta - 1), \quad Lr_{j-1} = r_0 e^{\delta j} (1 - e^{-\delta}), \quad L\varphi_j = r_0 e^{\delta j} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (3)$$

Щоб знайти проєкції зусиль на вертикальну площину у стрижнях радіального та колового напрямку, розглянемо дві пари зв'язків вузла  $(j, k)$  та запишемо рівняння їх рівноваги в локальній системі координат.

Для стрижня  $BA$  (рис. 3):

$$Qr_{j-1,k} = \frac{Nr_{j-1,k} (w_{j,k} - w_{j-1,k})}{r_0 e^{\delta j} (1 - e^{-\delta})}. \quad (4)$$

За аналогією обчислюється вертикальна складова зусилля  $Qr_{j,k}$  в стрижні  $AC$  з номером  $(j, k)$  який з'єднує вузли  $(j, k)$  та  $(j+1, k)$ :

$$Qr_{j,k} = \frac{Nr_{j,k} (w_{j+1,k} - w_{j,k})}{r_0 e^{\delta j} (e^\delta - 1)}. \quad (5)$$

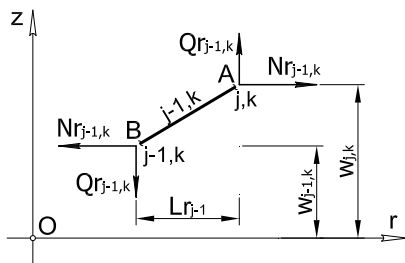


Рис. 3. Рівновага радіального стрижня  $(j-1, k)$



Рис. 4. Рівновага колового стрижня  $(j, k-1)$

Для стрижня  $EA$  (рис. 4):

$$Q\varphi_{j,k-1} = \frac{N\varphi_{j,k-1}}{2r_0 e^{\delta j} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} (w_{j,k} - w_{j,k-1}). \quad (6)$$

За аналогією обчислюється вертикальна складова зусилля  $Q\varphi_{j,k}$  в стрижні  $AD$  з номером  $(j, k)$ , який з'єднує вузли  $(j, k)$  та  $(j+1, k)$ :

$$Q\varphi_{j,k} = \frac{N\varphi_{j,k}}{2r_0 e^{\delta j} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} (w_{j,k+1} - w_{j,k}). \quad (7)$$

Розглянемо рівновагу вузла  $(j, k)$ . Сума проєкцій усіх сил на вісь  $z$ :

$$-Qr_{j-1,k} - Q\varphi_{j,k-1} + Qr_{j,k} + Q\varphi_{j,k} + P_{j,k} = 0, \quad (8)$$

де  $P_{j,k}$  – формоутворююче зусилля.

Після підстановки (4), (5), (6) та (7) в (8), отримуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{Nr_{j-1,k}}{r_0 e^{\delta j} (1-e^{-\delta})} w_{j-1,k} + \frac{N\varphi_{j,k-1}}{2r_0 e^{\delta j} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} w_{j,k-1} - \\ & - \left( \frac{Nr_{j-1,k}}{r_0 e^{\delta j} (1-e^{-\delta})} - \frac{N\varphi_{j,k-1}}{2r_0 e^{\delta j} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} + \frac{Nr_{j,k}}{r_0 e^{\delta j} (e^{\delta} - 1)} - \frac{N\varphi_{j,k}}{2r_0 e^{\delta j} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right) w_{j,k} + \\ & + \frac{N\varphi_{j,k}}{2r_0 e^{\delta j} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} w_{j,k+1} + \frac{Nr_{j,k}}{r_0 e^{\delta j} (e^{\delta} - 1)} w_{j+1,k} + P_{j,k} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $Nr_{j-1,k}$ ,  $Nr_{j,k}$ ,  $N\varphi_{j,k-1}$ ,  $N\varphi_{j,k}$  – проєкції зусиль в радіальних та колових

напрямах, що визначаються за формулами:  $Nr_{j-1,k} = \left(1 + 2j \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) R_k$ ,

$$Nr_{j,k} = R_k + 2 \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{i=0}^j S_i, \quad (1 \leq j < m-1), \quad N\varphi_{j,k-1} = N\varphi_{j,k} = S_j,$$

$$(0 < j < m), (0 < k < n).$$

Отже, скінченно-різницеve рівняння для визначення аплікват вузлів сітки, в загальному випадку, при довільній функції розподілу вузлів у радіальному напрямку має вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{Nr_{j-1,k}}{Lr_{j-1}} w_{j-1,k} + \frac{N\varphi_{j,k-1}}{L\varphi_j} w_{j,k-1} - \\ & - \left( \frac{Nr_{j-1,k}}{Lr_{j-1}} - 2 \frac{N\varphi_{j,k}}{L\varphi_j} + \frac{Nr_{j,k}}{Lr_j} \right) w_{j,k} + \quad (0 < j < m) \\ & + \frac{N\varphi_{j,k}}{L\varphi_j} w_{j,k+1} + \frac{Nr_{j,k}}{Lr_j} w_{j+1,k} + P_{j,k} = 0 \quad (0 < k < n) \end{aligned} \quad (10)$$

де  $Lr_{j-1}$ ,  $Lr_j$ ,  $L\varphi_j$  – довжини проєкцій елементів сітки (3) які визначаються залежно від закону розподілу вузлів (1) в радіальному напрямку.

Графічна інтерпретація обчислювального шаблону (10) представлена на рис. 5.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{\frac{N\varphi_{j,k-1}}{L\varphi_j}} & & \\
 k+1 & & & & \\
 & \boxed{\frac{Nr_{j-1,k}}{Lr_{j-1}}} & - \left( \frac{Nr_{j-1,k}}{Lr_{j-1}} - 2\frac{N\varphi_{j,k}}{L\varphi_j} + \frac{Nr_{j,k}}{Lr_j} \right) & \boxed{\frac{Nr_{j,k}}{Lr_j}} & + P_{j,k} = 0 \\
 k & & & & \\
 & & \boxed{\frac{N\varphi_{j,k}}{L\varphi_j}} & & \\
 k-1 & & & & \\
 & j-1 & j & j+1 & 
 \end{array}$$

Рис. 5. Графічне представлення скінченно-різницевого оператора при довільній функції розподілу вузлів у радіальному напрямку

Параметри  $R_k$  та  $S_j$  можна прийняти рівними:  $R_k = S_j = T$ . Тоді скінченно-різницеве рівняння (8) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1+2jD}{1-e^{-\delta}} w_{j-1,k} + \frac{1}{2D} w_{j,k-1} - \left( \frac{1+2jD}{1-e^{-\delta}} - \frac{1}{D} + \frac{1+2(j+1)D}{e^{\delta}-1} \right) w_{j,k} + \\
 & + \frac{1}{2D} w_{j,k+1} + \frac{1+2(j+1)D}{e^{\delta}-1} w_{j+1,k} + \frac{r_0 e^{\delta j}}{T} P_{j,k} = 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

де  $D = \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ,  $T = 1$  – сила яка відіграє роль масштабного коефіцієнта.

Графічна інтерпретація обчислювального шаблону (11) представлена на рис. 6.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{\frac{1}{2D}} & & \\
 k+1 & & & & \\
 & \boxed{\frac{1+2jD}{1-e^{-\delta}}} & - \left( \frac{1+2jD}{1-e^{-\delta}} - \frac{1}{D} + \frac{1+2(j+1)D}{e^{\delta}-1} \right) & \boxed{\frac{1+2(j+1)D}{e^{\delta}-1}} & + \frac{r_0 e^{\delta j}}{T} P_{j,k} = 0 \\
 k & & & & \\
 & & \boxed{\frac{1}{2D}} & & \\
 k-1 & & & & \\
 & j-1 & j & j+1 & 
 \end{array}$$

Рис. 6. Графічне представлення скінченно-різницевого оператора при розподілі вузлів у радіальному напрямку за експоненціальною залежністю

**Приклад.** Побудувати модель ДПП яка представляє мінімальну поверхню, горизонтальна проекція якої має форму кільцевого сектора (рис. 7) з параметрами: в радіальному напрямку кількість вузлів  $m = 8$ , крок змінюється за

експоненціальною залежністю, в коловому – кількість вузлів  $n = 6$ , крок  $\varepsilon = \frac{\pi}{16}$ .  
 Опорний контур заданий у формі парабол (рис. 8).

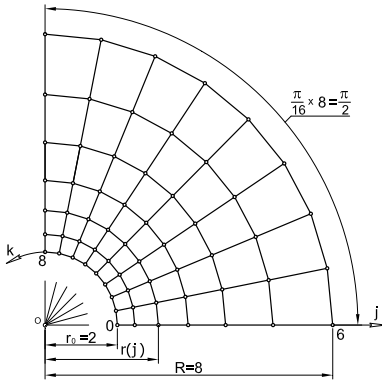


Рис. 7. Параметри плана ДПП

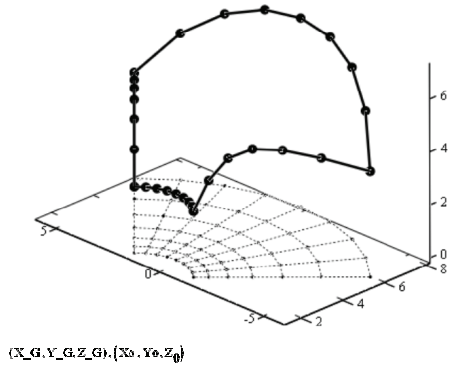


Рис. 8. Задані параметри ДПП: опорний контур та один внутрішній вузол

Враховуючи вихідні дані, модель ДПП описується на основі системи з 35-ти скінченно-різницевих рівнянь (11), записаних для усіх невідомих внутрішніх вузлів сітки, в якій:  $D = 0,098$ ,  $\delta = 0,2329$ ,  $r_0 = 2$ ,  $T = 1$ ,  $P_{j,k} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ ,  $k = 1, 2, \dots, 7$ .

В результаті розв'язання системи визначаються 35 невідомих аплікат вузлів ДПП. Матриця з аплікатами вузлів поверхні та опорного контура представлена на рис. 9. На рис. 10 представлено результат формування мінімальної ДПП на заданому опорному контурі.

$$Z = \begin{pmatrix} 2.5 & 3.667 & 4.5 & 4.85 & 4.8 & 4.5 & 4 \\ 2.5 & 3.256 & 3.913 & 4.404 & 4.768 & 5.102 & 5.55 \\ 2.5 & 3.103 & 3.704 & 4.287 & 4.889 & 5.587 & 6.5 \\ 2.5 & 3.053 & 3.644 & 4.281 & 5.004 & 5.879 & 7 \\ 2.5 & 3.042 & 3.632 & 4.288 & 5.047 & 5.974 & 7.15 \\ 2.5 & 3.053 & 3.644 & 4.281 & 5.004 & 5.879 & 7 \\ 2.5 & 3.103 & 3.704 & 4.287 & 4.889 & 5.587 & 6.5 \\ 2.5 & 3.256 & 3.913 & 4.404 & 4.768 & 5.102 & 5.55 \\ 2.5 & 3.667 & 4.5 & 4.85 & 4.8 & 4.5 & 4 \end{pmatrix}$$

Рис. 9. Матриця з аплікатами вузлів ДПП

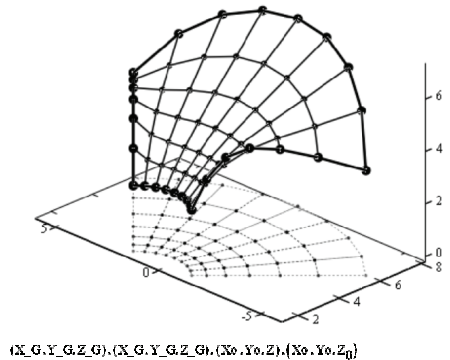


Рис. 10. ДПП сформована за попередньо заданими вимогами

**Висновки.** В роботі запропоновано спосіб побудови дискретних каркасів поверхонь статико-геометричним методом в циліндричній системі координат на плані сформованому в полярній системі координат з функціонально змінним кроком вузлів у радіальному напрямку. Отримано скінченно-різницевий оператор для визначення аплікат вузлів дискретної зрівноваженої сітки від довільного формоутворюючого навантаження та при довільних крайових умовах.

## Література

1. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / С.Н. Ковалёв // Дис. докт. техн. наук. 05.01.01 / М.: МАИ, 1986. – 348с.
2. *Пустюльга С.І.* Формоутворення дискретних моделей кривих ліній статико-геометричним методом в полярній системі координат / С.І. Пустюльга, В.П. Самчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2010. Вип. 86. – с. 160 - 165.
3. *Пустюльга С.І.* Формоутворення дискретно представлених поверхонь статико-геометричним методом в циліндричній системі координат / С.І. Пустюльга, В.П. Самчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2010. Вип. 84. – с. 285 - 291.

## ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОКРЫТИЯ С ПЛАНАМИ В ФОРМЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

*С. І. Пустюльга, В. П. Самчук*

В работе исследовано формообразование двумерных образов статико-геометрическим методом с проекциями на горизонтальную плоскость в форме кольцевого сектора с функционально переменным шагом узлов в радиальном направлении. Получены соответствующие вычислительные шаблоны и предложен алгоритм построения дискретно представленных уравновешенных поверхностей в цилиндрической системе координат.

## DISCRETE MODELING OF THE SURFACE IS COVERED WITH PLAN IN THE FORM ANNULAR SECTOR

*S. Pustulga, V. Samchuk*

In the article generation of geometry of two-dimensional characters is investigated by the statico-geometrical method of modeling of Professor S. Kovalov. The projections of these imageries on a horizontal plane have a form of circular sector. The algorithm of construction of the discretely presented balanced surfaces is offered in the cylindrical system of co-ordinates. The algorithm of formation of corresponding calculable template is worked out.