

**ВИБІР РАЦІОНАЛЬНОГО МЕТОДУ ВИЗНАЧЕННЯ
КУТОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ВИПРОМІНЮВАННЯ**

*Національний університет цивільного захисту України,
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут"*

***Розглянуто модифікацію методу RP-проецій, коли замість півсфери
одиначного радіуса використовується система співвісних циліндрів,
описаних за допомогою функцій Хевісайда.***

Постановка проблеми. Кутові коефіцієнти випромінювання (ККВ) займають центральне місце у вивченні процесів випромінювання та поширення світла, тепла в середовищі. Для обчислення локальних ККВ зручно застосовувати метод сфери одиначного радіуса (метод Нусельта) [1–4, 9], який покладено в основу радіально-паралельного проєціювання (RP-проєціювання) та метод півкуба [5–8]. Однак обчислення локальних ККВ знаними методами або може бути незручним через складнощі проєціювання на півсферу (метод Нусельта), або потребує вибору оптимального розміру квадратних областей – пікселів (метод півкуба). Тому актуальною є розробка такого методу визначення локальних ККВ, де похибка в обчисленнях буде мінімальною, що визначить раціональність запропонованого методу в порівнянні з іншими.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах Л. М. Куценка, О. В. Шоман, В. В. Семенової-Куліш, В. М. Попова, Д. В. Кукурузи вивчалися алгоритми радіально-паралельного проєціювання (RP-проєціювання) лише для певних поверхонь. В цих алгоритмах RP-проєціювання майже не надавало можливості ефективно враховувати вплив геометричної форми поверхонь випромінювання, що розташовані під невеликим кутом відносно площини, дотичної до заданої поверхні в точці, яка є центром сфери одиначного радіуса. Тому є актуальним вибір більш раціонального методу визначення локальних куткових коефіцієнтів випромінювання (ККВ).

Формулювання цілей та завдання статті. Розглянути спосіб обчислення локальних ККВ – "метод багаточиліндрів" – і зробити порівняння результатів, що одержані за допомогою запропонованого методу, з результатами, що одержані при використанні відомого методу RP-проєціювання.

Основна частина. ККВ є геометричним інваріантом, що визначає частку променевої енергії, яку "відає" одна поверхня і "приймає" інша поверхня. В загальному випадку ККВ визначає частку енергії, яка надходить від одного геометричного елемента-випромінювача безпосередньо на інший геометричний елемент-приймач. Таким чином, у разі, коли один геометричний елемент є джерелом світла, ККВ характеризує частку енергії прямого освітлення іншого елемента, яка припадає на одиницю потужності випромінювання від джерела

світла. ККВ є геометричним інваріантом і не залежить від характеристик відбиття поверхонь. Він залежить від відстані та розташування двох елементів, а також від наявності між ними непрозорих (для даного виду енергії) елементів. Формула визначення інтегрального кутового коефіцієнта [9] має вигляд:

$$F_{A_i-A_j} = \frac{1}{A_j} \int_{A_j} \int_{A_i} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (1)$$

де A_i, A_j – площі взаємно видимих ділянок двох поверхонь i та j , r – відстань між точками поверхонь.

Геометричну схему для обчислення ККВ за формулою (1) показано на рис. 1. Нусельт [9] розробив геометричний аналог, який дозволяє просто й точно обчислювати локальні ККВ між поверхнею-випромінювачем і точкою на поверхні-приймачі (рис. 2). А саме, елемент поверхні-випромінювача проєціюється радіально на півсферу, а потім ортогонально на площину, дотичну до поверхні-приймача в точці – центрі півсфери. Відношення площі проєкції, одержаної в результаті проєціювання на дотичну площину, до площі круга одиничного радіуса, чисельно дорівнює локальному ККВ.

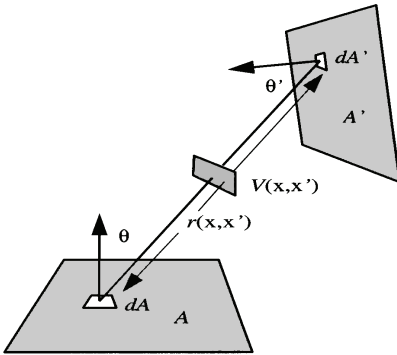


Рис. 1. Геометричне середовище для обчислення ККВ

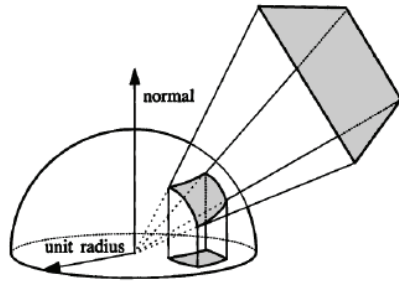


Рис. 2. Схема методу сфери одиничного радіуса – схема Нусельта

ККВ від dA_i до елемента A_j прямо пропорційний площі проєкції на великий круг півсфери

Локальний кутовий коефіцієнт F являє собою

$$F_{dA_i-A_j} = \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_j. \quad (2)$$

Реалізувати чисельно формулу (2) за допомогою програми можна у вигляді

for i from -DSK to DSK do for j from -DSK to DSK do

$LL_{i,j} := \text{point}([x, y], \text{color} = \text{white});$

```

x := evalf( $\frac{i}{DSK}$ );
y := evalf( $\frac{j}{DSK}$ );
if 0 ≤ 1 - x2 - y2 then
  LLi,j := point([x, y], symbol = POINT);
  sok := sok + 1;
  z := √(1 - x2 - y2);
  ff := (ax + by + cz)2 - a2 - b2 - c2 + r2;
  if 0 ≤ ff then LLi,j := point([x, y], symbol = CIRCLE); srp := srp + 1 end if
end if
end do
end do

```

Зображення можна побудувати за допомогою оператора `display({ seq(seq(LLi,j, i = -DSK .. DSK), j = -DSK .. DSK) }`);

Обчислювати ККВ за методом Нусельта не завжди є зручним через існування нераціональних етапів проєціювання на півсферу. Суттєвий внесок в інтегральні суми здійснюють лише елементи поверхні-випромінювача, розташовані в "зеніті" півсфери, а навіть відносно великі площі поверхні-випромінювача, що розташовані "біля горизонту" півсфери, майже не впливають на значення інтегральної суми.

Геометричний аналог Нусельта ілюструє той факт, що якщо геометричні елементи мають однакові проєкції на півсферу, то відповідні їм ККВ мають однакові значення. Аналогічно, якщо елемент спроеційований радіально на будь-яку проміжну поверхню (рис. 3), то ККВ для цієї проєкції буде таким самим, як і для самого елемента. Так, ділянки *A*, *B* і *C* на рис. 3 мають такі ж саме значення обчислених для них ККВ, як і значення ККВ для системи $dA_i - A_j$. Звідси випливає, що півсферу можна замінити півкубом (рис. 4) [5–8].

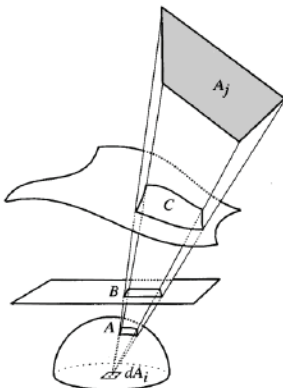


Рис. 3. Ділянки, для яких значення ККВ є однаковими

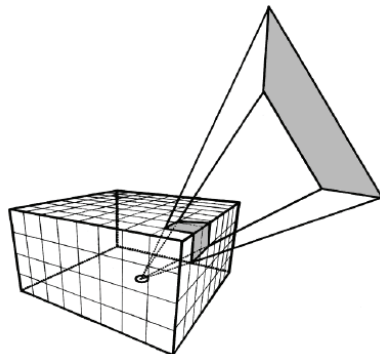


Рис. 4. Схема методу півкуба

Центр куба розташовано в точці уваги на поверхні. Верхня половина куба використовується для проєкціювання поверхні випромінювання. Кожна грань півкуба підрозділяється на множину невеликих, як правило, квадратних областей (пикселів), кожна з яких має попередньо обчислені значення ККВ. Відсік площини проєкціюється на півкуб, ідентифікуються і обчислюються відповідні комірки, шуканий ККВ площини дорівнює сумі ККВ комірок, на які впала тінь:

$$F_{dE_i-E_j} \approx \sum \Delta F_{ком}. \quad (3)$$

Комірки розділяють на дві складові: горизонтальні і вертикальні (рис. 5):

$$\Delta F_{dA_i} = \frac{1}{\pi \sqrt{x_i^2 + z_i^2 + 1}} \Delta A_i; \quad (4)$$

$$\Delta F_{dA_j} = \frac{1}{\pi \sqrt{y_j^2 + z_j^2 + 1}} \Delta A_j.$$

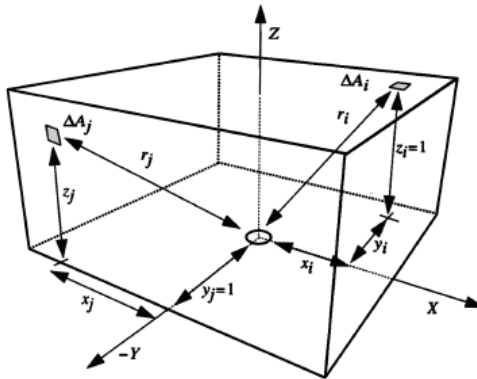


Рис. 5. Горизонтальні і вертикальні комірки

Якщо елементи, що проєціюються, покривають лише кілька комірок сітки, може статися згладжування. Результат обчислення локальних ККВ може залежати від елемента дискретизації. Занадто маленькі елементи, які перебувають в межах комірок сітки, можуть бути повністю пропущеними. Це є проблемою при оцінці локальних ККВ для маленьких за розмірами, але високоенергетичних, елементів, таких як джерела світла. Зменшення елементів розвитку півкуба сприятиме уникненню зазначеної проблеми, але є неефективним рішенням, оскільки мають бути задіяні в розрахунках всі елементи, незалежно від їх впливу на результат.

Швидкість і точність цього методу розрахунку ККВ залежать від зміни розміру і кількості дискретних областей на гранях півкуба. Для більшої точності великі за площею поверхні, як правило, доцільно розбивати на

множину поверхонь невеликих площ перед виконанням будь-яких розрахунків ККВ. Оскільки для використання півкуба як поверхні, що приймає випромінювання, необхідною є рівномірна сітка розбиття, використання даного методу також може бути неефективним. Для кожної комірки грані локальні ККВ є однаковими, і для зменшення квадратурної помилки розбиття горизонтальної та вертикальної граней повинні збігатися.

Для усунення цього доцільно запропонувати циліндр як "проміжну" поверхню, аналог півсфери одиничного радіуса. Зазначену ідею покладено в основу алгоритму і програми обчислення локальних ККВ. Для цього необхідно у наведеній вище програмі замінити рівняння півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ на рівняння системи співвісних півциліндрів.

Описувати у аналітичному вигляді співвісні півциліндри пропонується за допомогою функції Хевісайда:

$$Heaviside(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

При цьому функцію Хевісайда доцільно представити у вигляді

$$Heaviside(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{|x|}{x} + 1 \right) \quad (6)$$

З формули (6) видно, що операція $Heaviside(x)$ замінює чотири арифметичні операції, що сприятиме підвищенню швидкодії процесу обчислень.

Легко переконатися у тому, що рівняння поверхні одного "зрізаного" циліндра радіуса R і висотою H можна описати у вигляді

$$f = H \left(1 - Heaviside \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right) \right) \quad (7)$$

Твердження. Рівняння поверхні, складеної з N співвісних зрізаних циліндрів, має вигляд

$$z = \bigvee_{i=1}^N \left\{ \frac{i}{N} \left(1 - Heaviside \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \left(1 - \frac{i}{N} \right) \right) \right) \right\} \quad (8)$$

де \vee – знак R-диз'юнкції [10].

На основі цього твердження було складено програму побудови N співвісних зрізаних циліндрів:

$N := 7; F := 0$

for i **to** N **do**

$$H := 0 + \frac{i}{N}; R := \sqrt{1 - \frac{i}{N}}$$

$$f := H(1 - \text{Heaviside}(\sqrt{x^2 + y^2} - R))$$

$F := \max(F, f)$

end do

На рис. 6 зображено приклади співвісних зрізаних циліндрів для різних значень N , побудованих за допомогою оператора `plot3d(F(x, y), x = -1.1 .. 1.1, y = -1.1 .. 1.1, grid = [100, 100], axes = BOXED, scaling = constrained, thickness = 1, orientation = [-110, 70])`

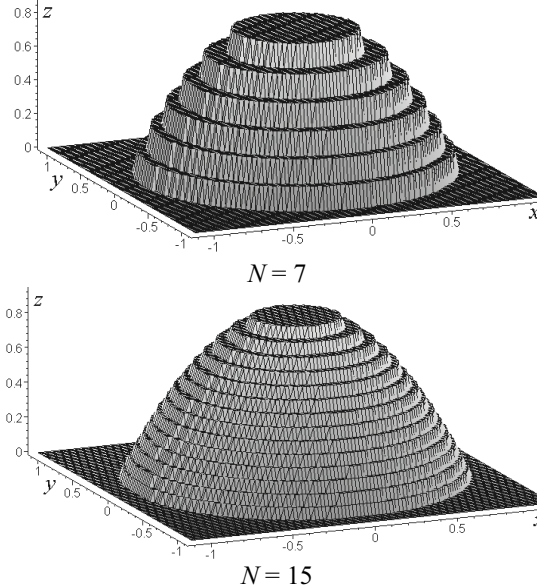


Рис. 6. Приклади співвісних зрізаних циліндрів залежно від N

Висновки. Наведений спосіб опису співвісних зрізаних циліндрів буде використано при обчисленні локальних ККВ і може увійти у математичне забезпечення при розробці програмного продукту для аналізу теплових потоків.

Література

1. Попов В.М. Метод оцінки теплового потоку, що випромінюється еліпсоїдом як факелом полум'я / В. М. Попов, Л. М. Куценко, В. В. Семенова-Куліш. – Х.: ХІПБ МВС України, 2000. – 144 с.

2. *Шоман О.В.* Геометрические инварианты теории лучевого энергообмена между поверхностями // Труды ТГАТА. – Мелитополь: ТГАТА, 1997. – Вып. 4. – Т. 1. – С. 99–102.

3. *Куценко Л.Н., Арендарчук А.В.* Метод вычисления угловых коэффициентов излучения для исследований радиационного теплообмена между телами сложных пространственных форм // Инженерно-физический журнал. – 1989. – Т. 57. – № 4. – С. 690–694.

4. *Куценко Л.Н., Шоман О.В.* Приближенный метод вычисления локальных угловых коэффициентов излучения // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1996. – Вип. 60. – С. 46–49.

5. *Самарин В.О., Шоман О.В.* Знаходження локальних кутових коефіцієнтів випромінювання методом півкуба // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 287–292.

6. *Ian Ashdown.* Radiosity: A Programmer's Perspective // Publisher: John Wiley Sons, New York, NY, 2002. – P. 271–287.

7. *Jeffrey C. Beran-Koehn and Mark J. Pavicic.* A cubic tetrahedra adaption of the hemicube algorithm // In James Arvo, editor, Graphics Gems II, Academic Press, Boston, 1991. – P. 299–302.

8. *Michael F. Cohen, John R. Wallace.* Radiosity and realistic image synthesis. // Publisher: Academic Press, Inc., USA, 1995. – P. 72–86.

9. *Зигель Р., Хауэл Дж.* Теплообмен излучением: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 934 с.

10. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

ВЫБОР РАЦИОНАЛЬНОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

В. А. Самарин, О. В. Шоман

Рассмотрена модификация метода RP-проекции, когда вместо полусферы единичного радиуса используется система соосных цилиндров, описанных при помощи функции Хевисайда.

CHOOSING A RATIONAL METHOD FOR DETERMINING THE ANGULAR RADIATION COEFFICIENTS

Volodymyr O. Samarin, Olga V. Shoman

Modification of the RP-projection method is considered when instead of unit-hemisphere using coaxial cylinder system described by Heaviside function.