

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РІТЦА ПРИ ПОБУДОВІ БАЗИСУ СЕРЕНДИПОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

*Херсонський національний технічний університет, Україна*

*Для серендипового скінченного елемента (ССЕ) третього порядку побудовано субгармонічний базис за допомогою методу Рітца. Виконано порівняльний аналіз властивостей відомих базисів для вказаного ССЕ.*

**Постановка проблеми.** При розв'язанні складних еліптичних задач наближеними методами, зокрема методом скінчених елементів (МСЕ), можливості сучасних персональних комп'ютерів (ПК) виявляються обмеженими. Тому існує проблема оптимізації відомих методів з метою підвищення швидкості збіжності наближених розв'язків до точних, зниження вимог до обчислювальних ресурсів ПК, що дозволяє істотно розширити умови практичного застосування цих методів.

**Аналіз основних досліджень і публікацій.** У роботах [1-3] будуються базисні функції скінчених елементів, які точно задовольняють рівнянням полів, для яких шукають наближення. Це гарантує високий порядок апроксимації та покращує швидкість збіжності наближених розв'язків. Застосування цих базисів при реалізації МСЕ на ПК (зокрема з характеристиками: Core (TM) 2 CPU, тактова частота 1,86 GHz, ОЗП 2,00 ГБ) приводить до мало прийняттого для користувача часу розв'язання практичних задач [4-7]. Тому у роботі [8] авторами показана можливість побудови поліноміального базису для серендипового скінченного елемента другого порядку за допомогою методу Рітца. У цьому випадку базисні функції отримуються у вигляді рядів, які збігаються всередині ССЕ до відповідних гармонічних функцій. Вказані базиси будемо називати субгармонічними. Такі обчислювальні характеристики, як слід матриці жорсткості та число обумовленості матриці Грама у нормі метрики  $L_2$ , є практично однаковими для базисів, побудованих за методом Фур'є [1] і за методом Рітца [8]. Але час обчислення матриці жорсткості у останньому випадку зменшується приблизно у 15 разів.

**Ціль статті.** Продовжити поповнення бібліотеки базисних функцій ССЕ за рахунок побудови субгармонічного базису для ССЕ третього порядку за допомогою методу Рітца. Порівняти обчислювальні характеристики стандартного, гармонічного і субгармонічного базисів досліджуваного ССЕ.

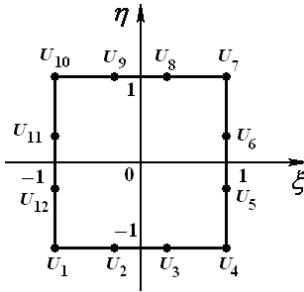


Рис. 1. CCE третього порядку

**Основна частина.** Базисні функції стандартного поліноміального базису середньопового прямокутного скінченного елемента третього порядку  $\{NS_i\}$  у локальних координатах  $\xi O \eta$  для вузлів  $U_1(-1;-1)$  та  $U_2\left(-\frac{1}{3};-1\right)$  (рис. 1) мають вигляд:

$$NS_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)\left(-10+9(\xi^2+\eta^2)\right);$$

$$NS_2 = \frac{9}{32}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(1-3\xi).$$
(1)

Як і у роботі [8] у випадку CCE другого порядку, для знаходження виразів субгармонічних базисних функцій із поліноміальною структурою  $\{NR_i\}$  розв'яжемо задачу Діріхле для області у вигляді CCE третього порядку (рис. 1) із граничними умовами, які співпадають із стандартними базисними функціями (1), методом Рітца:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 NR_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 NR_1}{\partial \eta^2} = 0 \\ NR_1|_{\Gamma} = NS_1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 NR_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 NR_2}{\partial \eta^2} = 0 \\ NR_2|_{\Gamma} = NS_2 \end{cases} \quad (3)$$

Для розв'язання граничних задач виконаємо відповідні заміни:

$$NR_1 = W_1 + NS_1; \quad (4) \quad NR_2 = W_2 + NS_2. \quad (5)$$

Заміни (4) і (5) переводять граничні задачі (2) і (3) у граничні задачі для рівняння Пуассона із нульовими граничними умовами:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} = -\frac{9}{8}(1-2(\xi+\eta)+3\xi\eta) \\ W_1|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} = \frac{9}{16}(1-(9\xi+\eta)+9\xi\eta) \\ W_2|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Розв'язки граничних задач (6) і (7) методом Рітца будемо шукати у вигляді частинних сум степеневих рядів, обмежившись, наприклад, поліномами десятого степеня:

$$W_1 \approx \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\left(\sum_{i=0}^6 k_{i0}\left(\xi^i+\eta^i\right)+\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^{i+j=6} k_{ij}\left(\xi^i \eta^j+\xi^j \eta^i\right)\right); \quad (8)$$

$$W_2 \approx (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \cdot \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^{i+j=6} k_{ij} \xi^i \eta^j. \quad (9)$$

Значення коефіцієнтів у частинних сумах (8) і (9) отримують, мінімізуючи такий функціонал:

$$\iint \left( \left( \frac{\partial W_i}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_i}{\partial \eta} \right)^2 + 2f_i W_i \right) d\xi d\eta \rightarrow \min, \quad (10)$$

де  $i = 1, 2$ ;  $f_1 = -\frac{9}{8}(1 - 2(\xi + \eta) + 3\xi\eta)$ ;  $f_2 = \frac{9}{16}(1 - (9\xi + \eta) + 9\xi\eta)$ .

Відзначимо, що при формуванні виразу (9) функції  $W_2$  відсутня вимога симетричності графіка функції відносно площини  $\xi = 0$ , як це має місце у роботі [8] для аналогічної функції.

Після знаходження значень коефіцієнтів у виразах (8-9) за формулами (4-5) отримуємо вирази перших двох базисних функцій із базису  $\{NR_i\}$ . Вирази інших функцій отримуємо із геометричних міркувань, застосовуючи формули перетворення координат. Чисельні значення коефіцієнтів у даній статті не наводяться через їх громіздкість. Відмінності між графіками відповідних функцій із базисів  $\{NF_i\}$  і  $\{NR_i\}$  візуально не спостерігаються (рис. 2).

**Висновки.** Побудований авторами базис для ССЕ третього порядку  $\{NR_i\}$  та відомий із роботи [1] базис  $\{NF_i\}$  мають близькі обчислювальні характеристики (табл. 1), які є кращими за відповідні характеристики стандартного базису  $\{NS_i\}$ . Причому час обчислення матриці жорсткості на ПК із характеристиками, вказаними на початку статті, для базису  $\{NR_i\}$  із базисними функціями у вигляді поліномів 10-ого степеня приблизно у 100 разів менший, ніж для базису  $\{NF_i\}$  із 5-ма доданками у частинних тригонометричних сумах.

**Перспективи подальших досліджень.** Наступну публікацію автори планують присвятити результатам практичного застосування базисів, побудованих за методом Рітца, при розв'язанні інженерних задач МСЕ.

Таблиця 1

Характеристики досліджуваних базисів ССЕ III порядку

Характеристики	Базиси ССЕ III порядку		
	$\{NS_i\}$	$\{NF_i\}$	$\{NR_i\}$
Слід матриці жорсткості	39,40	17,35	17,36
Число обумовленості матриці Грама у нормі $L_2$	83,99	34,88	36,36

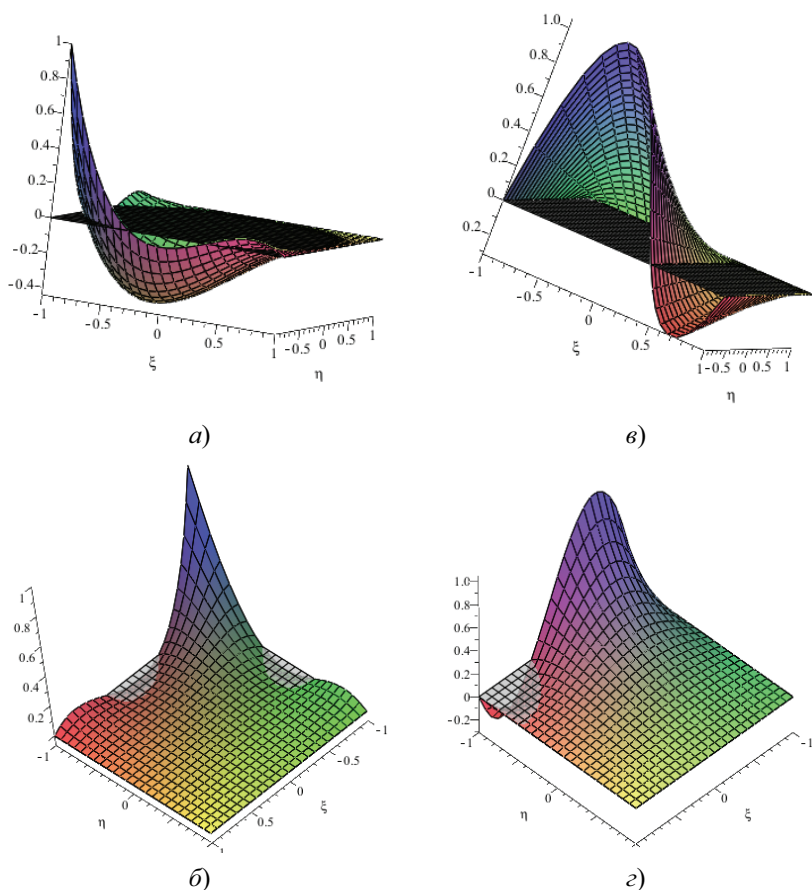


Рис. 2. Графіки базисних функцій CSE III порядку:  
 а) –  $NS_1$ ; б) –  $NF_1$  або  $NR_1$ ; в) –  $NS_2$ ; з) –  $NF_2$  або  $NR_2$ .

## Література

1. Юлдашев О.И. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации [Электронный ресурс] / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // Объединенный институт ядерных исследований. Лаборатория информационных технологий. Научный отчет 2006-2007. — Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 2007. — С. 317—320. — Режим доступа к отчету: [http://lit.jinr.ru/Reports/SC\\_report\\_06-07/pdfall/p317.pdf](http://lit.jinr.ru/Reports/SC_report_06-07/pdfall/p317.pdf)

2. Юлдашев О.И. Конечно-элементные векторные узловые базисные функции из специальных гильбертовых пространств / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // Объединенный институт ядерных исследований. Лаборатория информационных технологий. Научный отчет 2008-2009. — Дубна:

Объединенный институт ядерных исследований, 2009. — С. 105—108.

3. *Юлдашев О.И.* О конечно-элементном подходе относительно векторов поля для расчетов сложных магнитных систем экспериментальной физики / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // Объединенный институт ядерных исследований. Лаборатория информационных технологий. Научный отчет 2006-2007. — Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 2007. — С. 234—238.

4. *Хомченко А.Н.* Аналіз впливу властивостей базисів одного серендипового скінченного елемента на результати моделювання теплового поля / А.Н. Хомченко, Г.Я. Тулущенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — 2010. — Вип. 86. — С. 70—77.

5. *Тулущенко Г.Я.* Властивості 2D серендипового елемента третього порядку із гармонічним базисом / Г.Я. Тулущенко, А.Н. Хомченко, О.Е. Зичкова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — 2011. — Вип. 87. — С. 382—387.

6. *Астіоненко І.О.* Дослідження точності моделювання температурного поля за допомогою серендипових апроксимацій. Частина 1. Апроксимації II і III порядків / І.О. Астіоненко, О.І. Литвиненко, Г.Я. Тулущенко, А.Н. Хомченко // Проблеми інформаційних технологій. — 2010. — № 2 (008). — С. 18—25.

7. *Астіоненко І.О.* Дослідження точності моделювання температурного поля за допомогою серендипових апроксимацій. Частина 2. Апроксимації IV порядку / І.О. Астіоненко, О.І. Литвиненко, Г.Я. Тулущенко, А.Н. Хомченко // Проблеми інформаційних технологій. — 2011. — № 1 (009). — С. 34—41.

8. *Тулущенко Г.Я.* Про наближені методи побудови гармонічних базисів серендипових скінчених елементів / Г.Я. Тулущенко, Н.В. Старун, А.М. Лукашова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. — Мелітополь, 2012. — Вип. 4. Прикладна геометрія, інженерна графіка. — Т. 54. — С. 179—183.

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА РИТЦА ПРИ ПОСТРОЕНИИ БАЗИСА СЕРЕНДИПОВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

*Г. Я. Тулущенко, Н. В. Старун, А. Н. Лукашова*

Для серендипового конечного элемента (СКЭ) третьего порядка построен субгармонический базис с помощью метода Ритца. Выполнен сравнительный анализ свойств известных базисов для указанного СКЭ.

## **USING THE RITZ METHOD IN THE CONSTRUCTION OF THE THIRD-ORDER SERENDIPITY FINITE ELEMENT BASIS**

*G. Ya. Tuluchenko, N. V. Starun, N. M. Lukashova*

For third-order serendipity finite element (SFE) subharmonic basis is constructed by using the Ritz method. A comparative analysis of the properties of known bases for a specified SFE is performed.