

МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ПІДХОДУ З ВИКОРИСТАННЯМ N-ВИМІРНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Національний авіаційний університет, Україна

Актуальність даної роботи полягає у розробці оптимальних методів моделювання складних багатопараметричних процесів, що відбуваються в екологічних системах, у зв'язку з суттєвим підвищенням рівня сучасних вимог щодо якості кінцевих результатів задач прогнозування екологічної безпеки певної території та процесів, що відбуваються на ній.

Багато задач геометричного моделювання потребують побудови однопараметричних множин, що включають у себе певні об'єкти та процеси. Особливо це стосується екологічних систем, які, як відомо, є багатопараметричними системами, що складаються з багатьох компонентів. Побудова континуальної математичної моделі такої системи є занадто складною задачею, яка часто взагалі не може бути розв'язана. Також треба зазначити, що параметри таких систем є суттєво неоднорідними. Більш того, вони ще й суттєво залежать від певних зовнішніх факторів, які інколи неможливо передбачити. Зрозуміло, що поєднати таку різноманітну компонентність у одній аналітичній (континуальній) математичній моделі просто неможливо. Таку ситуацію можна прослідкувати на прикладі такого великого об'єкту, як, скажімо, аеропорт, де існує багато чинників, пов'язаних із забрудненням довкілля та негативним впливом на здоров'я людей.

Важливим фактором є той факт, що певні параметри, або ж компоненти фактично вимірюються в деякий час і в деяких місцях. Тобто ця інформація, яка з часом змінюється, носить яскраво виражений дискретний характер.

Таким чином, цілком логічним є дискретно-інтерполяційний підхід щодо моделювання багатопараметричних екологічних систем, у якому передбачається побудова певних однопараметричних дискретних множин, що включають деяку сукупність параметрів таких систем. З геометричної точки зору це фактично може бути поверхня, або гіперповерхня, як n -вимірна модель певного середовища, що задана аналітично чи дискретно. Зазначимо, що дискретний спосіб представлення геометричної інформації об'єкта, що моделюється, є одним з раціональних. Крім того, дискретний підхід можна вважати більш загальним, тому що від неперервно-аналітичної моделі практично завжди можна перейти до дискретної, а в нашому випадку до дискретно-інтерполяційної.

Отже, при моделюванні складних екологічних систем, що не піддаються аналітичному опису доцільно використовувати дискретні чисельні масиви у вигляді геометричних моделей (точкових чи лінійних). Такі моделі оптимально підходять для подальшого проектування, що пов'язано з великим рівнем параметричності чи багатоконпонентності.

Інтерполяційні схеми на основі поліномів Лагранжа, що можуть бути використані, дозволяють отримати однопараметричну множину певних об'єктів чи процесів. Вибір саме таких інтерполяційних поліномів, на нашу думку, є оптимальним. Це обумовлено необов'язковим рівномірним розташуванням вузлів інтерполяції, можливістю представлення по кожній змінній своєї кількості вузлів інтерполяції.

Оригінальність запропонованого підходу полягає у тому, що під вузлом інтерполяції розуміється не точка, а більш складний математичний об'єкт, наприклад масив, що містить певні параметри деякої екологічної системи, або ж навіть певний процес, представлений у вигляді деякого функціонала, як сукупності її властивостей та параметрів.

Під схемою інтерполяції надалі будемо розуміти саме схему розташування таких вузлів інтерполяції.

Зазначимо, що такий підхід щодо моделювання екологічних систем, процесів чи екологічних ситуацій у літературі відсутній.

Отже, однопараметричні множини, отримані таким чином, є дискретними математичними моделями об'єктів та екологічних процесів. Елементом таких множин є деяка дискретна функція, що у загальному випадку може бути представлена, як дискретний чисельний масив, розмірність якого може варіюватись. Інтерполювання функцій, що можуть бути задані неявно чи параметрично, зводиться до розміщення у вузлах інтерполяції рівнянь чи дискретних масивів і отримання деякого функціонала з вектором параметрів, що включає в себе інтерполяційний параметр, координатні змінні, параметри, що характеризують форму та положення об'єктів, певні параметричні характеристики процесів.

Саме такий підхід дозволяє включати в однопараметричну множину об'єкти, що мають різну структуру і навіть властивості, а до того ж, ще й анізотропність, що саме й притаманно екологічним системам.

При нашому підході поліном Лагранжа може набути такого вигляду:

$$\Phi(u)_n = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(p_1, p_2, \dots, p_m) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j}$$

де u – параметр інтерполяції, $F(p_1, p_2, \dots, p_k)$ – вузлова функція, p_1, p_2, \dots, p_k – різноякісні параметри вузлової функції, n – кількість вузлів інтерполяції.

Наведений вираз, як очевидно, є одновимірною інтерполяцією.

Проте, як вже було зазначено вище, екологічні системи – це досить складні багатокomпонентні системи, параметри яких змінюються у часі й можуть мати різну векторну направленість. Геометрично модель такої системи фактично являє собою деяку гіперповерхню. Тому побудова моделі такої системи на основі дискретно-інтерполяційного підходу потребує використання n -вимірної інтерполяції.

Зокрема, у випадку двовимірної інтерполяції можна знайти вид степеневого многочлена $\Phi_{m,n}(u,v)$ степеня m по u та n по v , та визначити

значення функціонала F у довільній точці з параметрами (u, v) . Геометрично це означає, що при двовимірній інтерполяції через вузлові точки проходить деяка поверхня $z = \Phi_{m,n}(u, v)$.

Побудуємо регулярну сітку та задамо у вузлах сітки значення функції Z . Тоді вся область площадка розпадається на mn прямокутників, в один з яких і потрапить точка (u, v) . Відбувається інтерполяція при різних u , но фіксованих v_j , після чого необхідно перейти до v_{j+1} і повторити знову всю процедуру. Отже, отримуємо 2-вимірну інтерполяцію $\Rightarrow \Phi_{m,n}(u, v)$ степеня m по u і степеня n по $v \Rightarrow z(u, v)$ у довільній точці $T(x, y)$. Через вузлові точки проводиться деяка поверхня $z = \Phi_{m,n}(u, v)$. Отримуємо таку формулу для двовимірної інтерполяції за Лагранжем:

$$\Phi_{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} F_{i,j}(p_1, p_2, \dots, p_l) \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^{m-1} \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{n-1} \frac{(u - u_i)(v - v_j)}{(u_p - u_i)(v_q - v_j)}$$

На основі даного виразу можемо отримати відповідну дискретно-інтерполяційну модель певного екологічного процесу або ж екологічної системи, підставляючи у вузол інтерполяції дискретний чисельний масив із сукупністю компонентів (навіть різноякісних та анізотропних) цієї системи.

У випадку 3-вимірної інтерполяції (для дуже складних та багатокомпонентних екологічних систем) через вузлові точки проходить деяка гіперповерхня, що являє собою многочлен 3 змінних, а формула буде мати аналогічний щодо двовимірної інтерполяції вигляд.

$$\Phi_{k,m,n}(u, v, w) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{n-1} F_{i,j,k}(p_1, p_2, \dots, p_l) \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^{m-1} \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{n-1} \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq k}}^{k-1} \frac{(u - u_i)(v - v_j)(w - w_k)}{(u_p - u_i)(v_q - v_j)(w_r - w_k)}$$

Степінь останнього виразу досить велика – kmp , але по кожній змінній може довільно варіюватися кількість вузлів інтерполяції. Многочлен mp степеня можна отримати при трикутній інтерполяції. Кількість вузлів при цьому визначається $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, що значно менше, ніж для прямокутної сітки (≈ 2 рази).

У випадку n -мірної інтерполяції через вузлові точки проходить деяка гіперповерхня, що являє собою многочлен n змінних, а формула буде мати аналогічний вигляд.

Важливим фактором є введення певного критерію інтерполяції. Це пов'язано з тим, що, інтерполяційний поліном фактично є зрізаним рядом (аналогом ряду Тейлора) у наслідок того, що він обмежений степенем n . Тому для збіжності відповідного аналога ряду Тейлора необхідно спадання абсолютної величини коефіцієнта при u з ростом степеня u .

Отже, запропонований підхід може бути найбільш ефективним при моделюванні об'єктів та середовищ, що характеризуються великою кількістю різноструктурних та різноякісних параметрів. Наприклад, якщо йдеться про

якісну й кількісну оцінку впливу забруднення на навколишнє середовище на прикладі сміттєзвалищ, аеропортів, шкідливих виробництв тощо. Дискретно-інтерполяційна модель при цьому буде мати такий вигляд:

$$\Phi_{\text{шкідл.}}(p_k) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(p_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j},$$

де $F_i(p_k) = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, p_k\}$

Сформулюємо деякі перспективні задачі, що можна вирішувати на основі запропонованого підходу:

1. Визначення рівня шкідливості у певних екосистемах.
2. Динамічне та довгострокове прогнозування забруднення навколишньої території.
3. Оптимальність розташування структурних компонентів систем.

Висновки: Запропонований підхід дозволяє отримати можливість моделювати досить складні об'єкти, екологічні процеси й системи, що характеризуються великою кількістю параметрів та властивостей, які можуть мати різноманітну структуру, а також і певну анізотропність цих властивостей у часі й просторі.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОДХОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ N-МЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Ю. Р. Холковский

В данной работе рассматривается нетрадиционный подход в методах геометрического моделирования многопараметрических экологических систем, имеющих разнообразную структуру, анизотропность свойств, которые часто невозможно объединить функционально-аналитически в обычной математической модели.

MODELING MULTIPARAMETER ECOLOGICAL PROCESSES ON THE BASIS OF DISCRETE-INTERPOLATION APPROACH USING n-DIMENSIONAL INTERPOLATION

Yu. R. Kholkovsky

This paper describes an unconventional approach to geometric modeling methods multiparameter environmental systems based on discrete interpolation approach.