

**ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕНЬ ЛАНОК ПЛОСКОГО МЕХАНІЗМУ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМИ ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ**

*Національний університет біоресурсів і природокористування України  
Сумський національний аграрний університет, Україна*

*Складено рівняння руху прямолінійної ланки механізму у вигляді відрізка в системі супровідного тригранника Френе напрямної кривої. Напрямна крива є спільною траєкторією руху кінця попередньої ланки і початку наступної. Рух другого кінця наступної ланки описується в системі супровідного тригранника, а потім знаходиться в нерухомій системі координат як траєкторія складного руху точки.*

**Постановка проблеми.** Кінематичний аналіз плоских механізмів розглядається у підручниках із теорії машин та механізмів. При цьому застосовуються геометричні методи кінематичного аналізу. Взаємопоседнання методів при кінематичному аналізі механізмів дало поштовх до введення терміну «Кінематична геометрія». Створення кінематичної геометрії зв'язано з іменами Ф. Саварі, Т. Олів'є і М. Шаля [1, стор. 196]. Ними були отримані фундаментальні результати в області зачеплень, центроїд тощо, які лягли в основу кінематичної геометрії. В статті показано застосування тригранника Френе для розв'язування задач з даного напрямку досліджень.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Про нерозривність зв'язку механіки та теорії механізмів з геометрією свідчить класична праця [2], в якій теорію синтезу плоских механізмів розглянуто на основі теоретичних знань різних віток геометрії. Наприклад, в працях [3, 4] для розв'язання задач кінематики механізмів використовується апарат проєктивної геометрії. В працях [5, 6] досліджуються траєкторії та швидкості точок, які здійснюють відносний рух у системі супровідного тригранника Френе і які можуть належати ланці механізму.

**Формулювання цілей та завдання статті.** Розробити математичну модель положення прямолінійної ланки механізму за допомогою супровідного тригранника траєкторії одного із її кінців.

**Основна частина.** Розглянуті в праці [7] теоретичні основи складного руху точки на площині дають можливість описати рух ланки в системі супровідного тригранника Френе напрямної кривої, якою є траєкторія точки  $A$  ланки. В цій праці описано складний рух точки, коли вона рухається за заданим законом у рухомій системі координат супровідного тригранника Френе напрямної кривої, а сам тригранник рухається по кривій. Рух тригранника є переносним, а рух точки в системі тригранника є відносним. Геометрична сума двох рухів дає абсолютну траєкторію точки по відношенню до нерухомої системи координат. При русі тригранника по напрямній кривій незалежною змінною, яка визначає положення тригранника на кривій, є дугова координата  $s$

– довжина дуги напрямної кривої. Відносний рух точки в системі тригранника описується залежностями від змінної  $s$ . Наприклад, положення точки  $B$  в системі тригранника можна задати в полярній системі координат відстанню  $\rho$  і кутом  $\varphi$  (рис. 1). В такому випадку відносна траєкторія руху точки  $B$  в системі

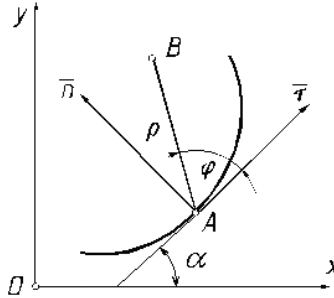


Рис. 1. Положення точки  $B$  в системі тригранника Френе (біномаль проєкціюється в точку у вершині  $A$ ).

тригранника Френе на орти дотичної  $\vec{\tau}$  і головної нормалі  $\vec{n}$  опишуться параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} \rho_{\tau} &= \rho \cos \varphi; \\ \rho_n &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Відстань  $\rho$  і кут  $\varphi$  у виразах (1) є функціями дугової координати  $s$  напрямної кривої, тобто траєкторії руху точки  $A$ . Будемо вважати, що довжина ланки  $AB$  має сталу довжину. В цьому випадку радіус-вектор  $\rho = \text{const}$ , що полегшує математичні операції над виразами (наприклад, при їх диференціюванні).

Вихідну плоску криву задамо натуральним рівнянням  $k=k(s)$ , де кривина  $k$  задана у функції довжини власної дуги  $s$ . Перехід до параметричних рівнянь (траєкторії точки  $A$ ) здійснюється за відомими формулами:

$$x_A = \int \cos(\int k ds) ds; \quad y_A = \int \sin(\int k ds) ds, \quad (2)$$

де  $\alpha = \int k ds$  – кут повороту ортів тригранника  $\vec{\tau}$  і  $\vec{n}$  по відношенню до осей  $Ox$  і  $Oy$  відповідно (рис. 1).

Якщо відомі залежності (1) і натуральне рівняння напрямної кривої (траєкторії точки  $A$ )  $k=k(s)$ , то абсолютна траєкторія руху точки  $B$  визначиться із параметричних рівнянь [7]:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho \cos(\varphi + \int k ds) + \int \cos(\int k ds) ds; \\ y_B &= \rho \sin(\varphi + \int k ds) + \int \sin(\int k ds) ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином, за рівняннями (2) визначаються координати точки  $A$  – одного кінця прямолінійної ланки  $AB$ , а за рівняннями (3) – координати точки  $B$  – протилежного її кінця. За координатами двох точок можна побудувати

множину положень прямолінійної ланки із заданою щільністю в залежності від величини  $\Delta s$ .

Слід зазначити, що рух тригранника по кривій можна розкласти на два: поступальний і обертальний. Це ж саме стосується і прямолінійної ланки  $AB$ . Закони обертальних рухів для тригранника і для ланки  $AB$  відомі:  $\alpha = \int k ds$  і  $\varphi = \varphi(s)$ . Щоб узнати кутову швидкість обертання  $\omega$ , потрібно ці залежності продиференціювати по часу  $t$ :

$$\omega_A = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\alpha}{ds} = v_A k; \quad \omega_B = v_A \frac{d\varphi}{ds}. \quad (4)$$

Таким чином, кутова швидкість обертання тригранника в конкретній точці напрямної кривої (при заданому значенні дуги  $s$ ) визначається добутком кривини кривої в цій точці на швидкість руху  $v_A$  вершини тригранника по кривій. Кутова швидкість обертання ланки  $AB$  в цій же точці напрямної кривої визначається добутком похідної  $\varphi$  по дузі  $s$  теж на швидкість руху  $v_A$ .

Розглянемо приклади. Нехай прямолінійна ланка у вигляді відрізка  $AB = \rho - const$  одним своїм кінцем (точкою  $A$ ) рухається по колу радіуса  $r$  ( $k=1/r$ ) із постійною швидкістю  $v_A$ . Відносний рух точки  $B$  в системі тригранника Френе задано лінійною залежністю  $\varphi = as$ , де  $a$  – стала величина. Побудувати множину положень відрізка  $AB$  при різних співвідношеннях кутових швидкостей  $\omega_A$  і  $\omega_B$ .

Оскільки напрямна крива – коло, то орт головної нормалі можна вважати кривошипом  $OA$ , який обертається навколо точки – центра цього кола – із кутовою швидкістю  $\omega_A = v_A / r$ . Ланка  $AB$  обертається навколо точки  $A$  із кутовою швидкістю  $\omega_B = v_A a$ .

Рівняння (2), які описують траєкторію руху точки  $A$  відрізка  $AB$ , після інтегрування при  $k=1/r$  набувають вигляду:

$$x_A = r \sin \frac{s}{r}; \quad y_A = -r \cos \frac{s}{r}. \quad (5)$$

Рівняння (3), які описують траєкторію руху точки  $B$  відрізка  $AB$ , після інтегрування при  $k=1/r$  і  $\varphi = as$  набувають вигляду:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho \cos \left[ \left( a + \frac{1}{r} \right) s \right] + r \sin \frac{s}{r}; \\ y_B &= \rho \sin \left[ \left( a + \frac{1}{r} \right) s \right] - r \cos \frac{s}{r}. \end{aligned} \quad (6)$$

На рис. 2 побудовано множину положень ланки  $AB$  як відрізків, що сполучають точку  $A$  (рівняння (5)) з точкою  $B$  (рівняння (6)) з деяким інтервалом  $\Delta s$ . Довжина відрізка  $AB = \rho = 2,5$  м,  $r = 5$  м,  $a = 0,2$ . За формулами (4) неважко переконатися, що кутові швидкості обертання кривошипа  $OA$  і ланки  $AB$  однакові і рівні  $\omega_A = \omega_B = 0,2 v_A$ . У випадку, коли вони мають протилежний знак, ланка здійснює поступальний рух, залишаючись паралельною самій собі (рис. 2, б). Якщо кривошип і ланка обертаються в однаковому напрямі, то множина положень відрізка  $AB$  дотикається до обвідної кривої (це добре видно на рис. 2, в).

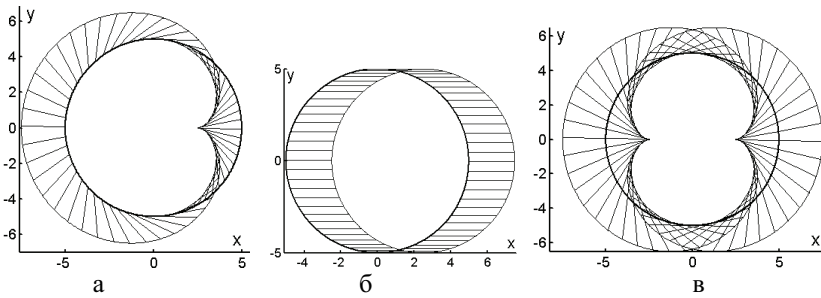


Рис. 2. Множина положень відрізка  $AB$  та траєкторії руху його кінців при рівних кутових швидкостях обертання відрізка  $AB$  і кривошипа  $OA$  (траєкторія точки  $A$  показана потовщеною лінією):  
 а) кутові швидкості мають однаковий напрям;  
 б) кутові швидкості мають протилежний напрям;  
 в) кутові швидкості мають однаковий напрям і відрізок  $AB$  продовжений від точки  $A$  в протилежну сторону на таку ж відстань.

На рис. 3 побудовано множину положень відрізка  $AB$ , коли його кутова швидкість обертання в півтора рази більша від кутової швидкості обертання кривошипа.

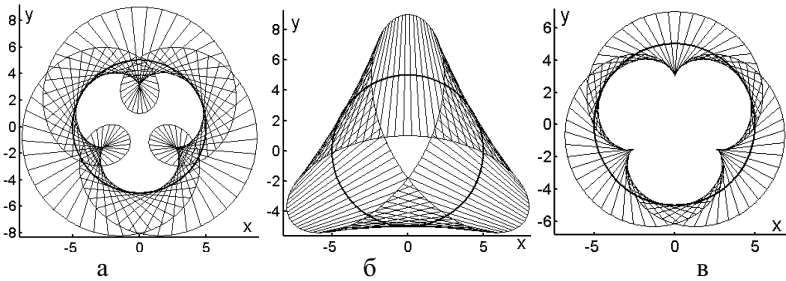


Рис. 3. Множина положень відрізка  $AB$  та траєкторії руху його кінців при  $\omega_B=1,5 \omega_A$  (відрізок має однакову довжину  $\rho$  в протилежних напрямках від точки  $A$  з'єднання із кривошипом):  
 а)  $\rho=4$ , кутові швидкості мають однаковий напрям;  
 б)  $\rho=4$ , кутові швидкості мають протилежний напрям;  
 в)  $\rho=2$ , кутові швидкості мають однаковий напрям.

Розглянемо побудову положень шатуна  $AB$  для широко розповсюдженого в техніці кривошипно-повзунного механізму, зображеного на рис. 4,а. За напрямну плоску криву беремо траєкторію руху кривошипа  $OA$ , один кінець якого нерухомий, а другий рухається по колу радіуса  $r$ , яке має кривину  $k=1/r$ . Це коло є також траєкторією руху другої ланки (шатуна  $AB$ ), тому ми опишемо рух шатуна у системі тригранника Френе кола – траєкторії руху точки  $A$  (рис. 4,б). Для цього розглянемо схему розташування шатуна  $AB=L$  в двох координатних системах: нерухомій  $Ox$  і рухомій тригранника Френе (рис. 4,б).

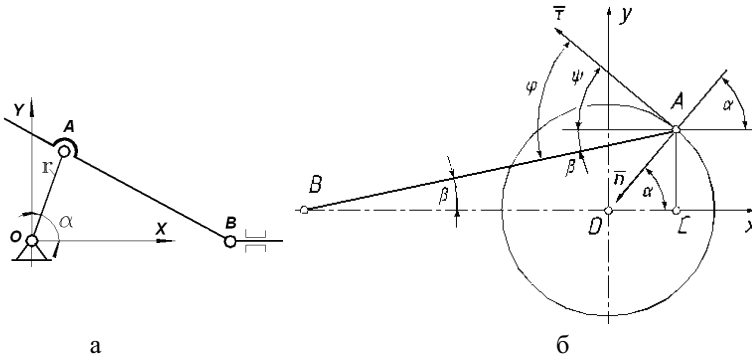


Рис. 4. Схеми до розрахунку положень шатуна  $AB$  кривошипно-повзунного механізму:  
 а) схема роботи кривошипно-повзунного механізму;  
 б) розташування шатуна  $AB$  в системі тригранника Френе.

Нехай кривошип  $OA$  повернувся на кут  $\alpha$  від початкового положення. Побудуємо в точці  $A$  тригранник Френе до кола радіуса  $OA=r$  (кривою  $k$ ), яке є траєкторією руху точки  $A$  шатуна  $AB$ . Очевидно, що кут  $\varphi$ , який він утворює із ортом дотичної  $\vec{\tau}$  є змінним і залежить від положення точки  $A$  шатуна на колі. Розглядаючи суміжні кути в околі точки  $A$ , можна записати очевидну рівність (рис. 4,б):  $\varphi=\psi+\beta$ , однак  $\psi=90^\circ-\alpha$ , тому  $\varphi=90^\circ-\alpha+\beta$ . Із прямокутного трикутника  $ABC$  знайдемо:  $\sin \beta = \frac{AC}{AB} = \frac{OA \sin \alpha}{AB} = \frac{r}{L} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{Lk}$ . Звідси  $\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{Lk}$ . Із визначення кривини  $k = \frac{da}{ds}$  знайдемо:  $\alpha=ks$ , оскільки для кола радіуса  $OA=r$  кривина є сталою і рівною  $k=1/r$ . Із врахування цього всього можна записати залежність  $\varphi = \varphi(s)$ :

$$\varphi = 90^\circ - ks + \arcsin \frac{\sin ks}{Lk}. \quad (7)$$

Щоб знайти траєкторію будь-якої точки шатуна  $AB$ , яка знаходиться на відстані  $\rho$  від точки  $A$ , скористаємося формулами (3). Підставивши в них вираз (7), після перетворень і спрощень отримаємо:

$$x = \frac{L-\rho}{Lk} \sin ks; \quad y = \frac{\rho}{Lk} \sqrt{L^2 k^2 - \sin^2 ks} - \frac{1}{k} \cos ks. \quad (8)$$

Якщо порівняти рівняння (8) із рівняннями (11.12), отриманими в [8] на стор. 79 при проєкціюванні ланок на нерухому систему координат  $Oxy$ , то ми побачимо певну аналогію з різницею в тому, що координати  $x$  і  $y$  помінялися місцями. Криві будуть однакові, тільки повернутими на кут  $90^\circ$ . Це свідчить про достовірність отриманих результатів в системі рухомого тригранника Френе. Зокрема, при  $\rho=L$  ми отримаємо траєкторію точки  $B$  (пряму лінію), а при  $\rho=0$  – коло радіуса  $r=1/k$ . Для конкретного значення дуги  $s$  на цих траєкторіях визначиться дві точки, при сполученні яких отримаємо певне

положення шатуна  $AB$ . На рис. 5 за рівняннями (8) побудовано множину положень шатуна і траєкторії його кінців за різних умов.

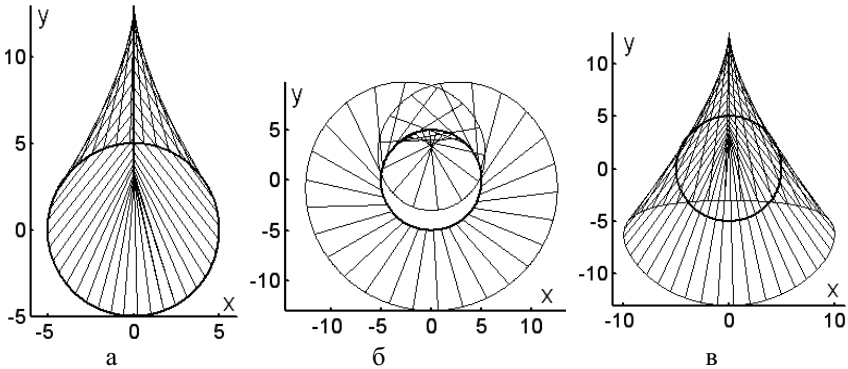


Рис. 5. Множина положень шатуна  $AB$  та траєкторії руху його кінців за різних початкових умов ( $k=0,2$ ;  $AB=8$ ):  
 а) закономірність зміни кута  $\varphi$  задано виразом (7);  
 б) закономірність зміни кута  $\varphi$  (7) взято із протилежним знаком;  
 в) закономірність зміни кута  $\varphi$  задано виразом (7) і подовжено шатун в протилежну сторону від точки  $B$  на таку ж відстань.

**Висновки.** Побудовано множину положень прямолінійного відрізка, один кінець якого рухається по колу. Для цього застосовано супровідний тригранник напрямної кривої (кола), в системі якого задається закономірність повороту цього відрізка. Протилежний кінець його здійснює складний рух по відношенню до нерухомої системи координат. Розроблений математичний апарат дозволяє знаходити як кутову швидкість відрізка, так і його положення в будь-який момент часу. Отримані зображення містять фрагменти обвідних кривих, до яких дотикаються відрізки множини. Перспективи подальших досліджень полягають в знаходженні рівнянь обвідних кривих.

## Література

1. Григорьян А.Т. История механики / А.Т. Григорьян. – М., 1972. - Т2. - 417 с.
2. Геронимус Я.Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов / Я.Л. Геронимус. – М.: Физматгиз, 1962. – 400 с.
3. Зубащенко Г.П. Об одном методе построения поворотной окружности / Г.П. Зубащенко // Теория механизмов и машин. – Харьков: ХГУ, 1985. - № 38. – С. 102 – 103.
4. Зубащенко Г.П. Використання проєктивних властивостей шарнірного чотириланковика при його кінематичному аналізі / Г.П. Зубащенко, Т.В. Попкова // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2001. –Вип. 69. – С. 114 – 117.

5. *Пилипака С.Ф.* Дослідження абсолютної траєкторії точки, яка рухається в системі супровідного тригранника плоскої кривої / С.Ф. Пилипака, В.М. Бабка // Геометричне та комп'ютерне моделювання. -Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2007. –Вип. 18. – С. 18 - 23.

6. *Пилипака С.Ф.* Дослідження абсолютної швидкості точок, розташованих на ортах супровідного тригранника плоских і просторових кривих / С.Ф. Пилипака, В.М. Бабка // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. –Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Том 38. –Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С. 44 - 51.

7. *Пилипака С.Ф.* Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина перша. Абсолютні швидкість і траєкторія / С.Ф. Пилипака // Електротехніка і механіка. –К., 2006. -№1. –С. 84-94.

8. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. Т. 1. Кинематика, статика, динамика точки / Н.А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – 480 с.

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ**

*В. Н. Бабка, А. В. Чепыжний*

Составлены уравнения движения прямолинейного звена механизма у виде отрезка в системе сопровождающего трехгранника Френе направляющей кривой. Направляющая кривая является общей траекторией движения конца предыдущего звена и начала следующего. Движение второго конца следующего звена описывается в системе сопровождающего трехгранника, а затем разыскивается в неподвижной системе координат как траектория сложного движения точки.

## **DEFINITION OF DISPOSITION OF SEGMENTS OF THE FLAT MECHANISM BY MEANS OF SYSTEM OF THREE – EDGE OF FRENET**

*V. Babka, A. Chepyzhniy*

The equations of traffic of the rectilinear segment of a mechanism in system of an three - edge of Frenet of a directing curve are worked out. The directing curve is the general mechanical trajectory of the end of the previous segment and of the following beginning. Traffic of the second end of a following segment is presented in system of an three - edge of Frenet, and then searched in a motionless system as a trajectory of a compound motion of a point.