

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ГРУНТА  
СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ,  
ВЫБРАСЫВАЕМЫХ РОТОРНЫМ ГРУНТОМЕТАТЕЛЕМ**

*Харьковский национальный университет строительства и архитектуры  
НТУ “Харьковский политехнический институт”  
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет*

*Разработана математическая модель движения частиц грунта, выбрасываемых роторным грунтометателем, в предположении квадратичной зависимости сил сопротивления воздуха от скорости. Предложен метод исследования влияния случайных параметров частиц грунта (формы, размера и т.д.) с произвольной плотностью вероятности распределения на дальность выбрасывания. Приведены результаты имитационного моделирования траекторий движения и дальности полета частиц грунта.*

**Постановка проблемы.** Работы, направленные на модернизацию технологии грунтометания при ликвидации низовых пожаров в условиях отсутствия воды чрезвычайно важны, так как существующие конструкции грунтометательных механизмов недостаточно совершенны [1, 2]. Рядом достоинств обладают роторные грунтометатели [2, 3], которые грунт в зону возгорания выбрасывают с помощью лопаток, расположенных на вращающемся роторе. Обеспечение рациональных технологических характеристик устройств зависит от качества моделирования движения частиц грунта в воздухе: учет нелинейного сопротивления воздуха, случайных параметров частиц грунта и т.д. Исследования по решению этих задач имеют актуальный характер.

**Анализ основных исследований и публикаций.** В работе [3] комплексные исследования движения частиц грунта в воздухе проведены в рамках линейной модели сил сопротивления воздуха. Простота указанной модели позволяет получить удобные для исследований аналитические решения. Определенные трудности при ее использовании обусловлены трудностью корректного выбора эквивалентного коэффициента сопротивления воздуха. Это приводит в свою очередь к осложнениям при учете случайного характера параметров частиц грунта. Перспективными представляются исследования по учету нелинейного характера сил сопротивления воздуха, случайного характера параметров частиц грунта на дальность их выбрасывания.

**Постановка задачи.** Построить математическую модель движения частиц грунта, выбрасываемых роторным грунтометателем, в предположении квадратичной зависимости сил сопротивления воздуха от скорости. Разработать метод исследования влияния случайных параметров частиц грунта (формы,

размера и т.д.) с различным распределением на дальность выбрасывания. Осуществить имитационное моделирование траекторий движения и дальности полета частиц грунта для проектируемого механизма.

**Основная часть.** На рис. 1 показана траектория движения частицы грунта, после соскальзывания с лопатки грунтometателя. Частица рассматривается как материальная точка  $M$ , движущаяся в вертикальной плоскости  $Oxy$  под действием силы тяжести  $mg$  и силы сопротивления воздуха [4]

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{2}k\rho S v^2 \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (1)$$

где  $k$  – коэффициент аэродинамического сопротивления;

$\rho$  – плотность воздуха (при  $20^\circ\text{C}$  –  $\rho = 1,2041 \text{ кг/м}^3$ );

$S$  – площадь поперечного сечения;

$\mathbf{v}$ ,  $v$  – соответственно вектор и модуль скорости.

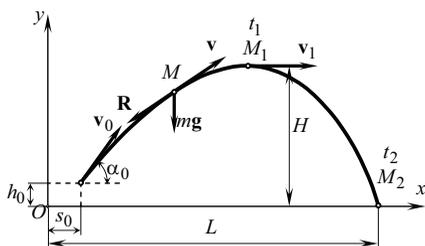


Рис. 1. Траектория движения частицы грунта

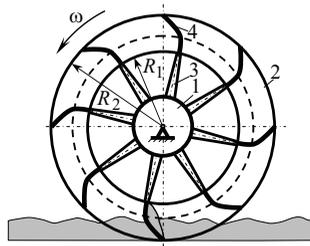


Рис. 2. Схема грунтometателя

Таким образом, сила сопротивления направлена против скорости и пропорциональна квадрату ее модуля.

На рисунке приняты обозначения:  $s_0$ ,  $h_0$  – декартовы координаты схода частицы;  $v_0$ ,  $\alpha_0$  – скорость и угол схода частицы;  $L$ ,  $H$  – дальность и наибольшая высота полета частицы (соответствующие моменты времени –  $t_1$ ,  $t_2$ ).

Основные элементы грунтometателя показаны на рис. 2: 1 – ступица; 2 – кольцо; 3 – спица; 4 – криволинейная лопатка. Предполагается, что метатель вращается с угловой скоростью  $\omega$  против хода часовых стрелок. Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  представляют собой радиусы окружностей, проходящих через заднюю и переднюю кромки лопатки.

**Вывод уравнений движения частицы грунта.** Воспользуемся основным законом динамики (законом Ньютона)

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}, \quad (2)$$

где  $m$  – масса частицы;

$\mathbf{a}$  – ускорение частицы;

$\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения.

Для квадрата модуля скорости имеет место формула

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad (3)$$

где  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$  – проекции скорости точки на координатные оси.

Если текущее значение угла, образуемого скоростью  $\mathbf{v}$  с осью  $x$ , обозначить через  $\alpha$ , то

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \quad (4)$$

Теперь проекции силы сопротивления (1) на координатные оси можно представить так:

$$R_x = -k\rho S \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x}; \quad R_y = -k\rho S \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y}. \quad (5)$$

Процируя векторное уравнение (2) на координатные оси  $x$  и  $y$ , с учетом (4) запишем систему дифференциальных уравнений движения точки  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{1}{2}k\rho S \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x}; \\ m\ddot{y} &= -mg - \frac{1}{2}k\rho S \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{1}{2} \frac{k\rho S}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x}; \\ \ddot{y} &= -g - \frac{1}{2} \frac{k\rho S}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  – проекции ускорения точки на координатные оси  $x$  и  $y$ .

Таким образом, исследование движения частицы грунта сводится к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка (7), что можно осуществить численно. Начальные условия будут, очевидно, следующими:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0 = s_0, \quad y = y_0 = h_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha_0. \quad (8)$$

**Обоснование квадратичной зависимости силы сопротивления воздуха от времени.** При достаточно большой скорости движения частицы грунта ее кинетическая энергия расходуется не только на трение, но и на перемещение некоторого объема воздуха впереди частицы. В таком режиме сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости (1). Описанный нелинейный режим возникает, когда безразмерное число Рейнольдса  $Re$  удовлетворяет условию

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} > 100, \quad (9)$$

где  $d$  – характерный поперечный размер (например, диаметр частицы);

$\eta$  – динамический коэффициент вязкости воздуха ( $\eta = 1,82 \cdot 10^{-5}$  кг/мс).

Для скорости движения частицы  $v = 30$  м/с и диаметра  $d = 0,01$  м имеем  $Re = 1,985 \cdot 10^4$ , т.е. условие (9) выполняется.

**Особенности исследования движения частиц грунта.** Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (7) порождает некоторые особенности исследования движения частиц грунта, так как решения в этом случае представляются дискретными значениями искомых функций. Для определения же дальности полета  $L$  необходимо найти время полета частицы  $t_2$  из условия  $y(t) = 0$ , а затем вычислить значение  $L = x(t_2)$ , что требует аналитического представления функций  $x(t)$  и  $y(t)$ . Современные математические пакеты, в частности MathCAD [5], позволяют достаточно просто обойти указанные осложнения, используя идею интерполяции таблично заданных функций. В данной работе расчеты выполнялись с применением кубической сплайн-интерполяции. Важным обстоятельством является то, что полученные таким способом функции в среде MathCAD можно аналитически дифференцировать, как и традиционные функции.

Для поиска корня уравнения  $y(t) = 0$  в среде MathCAD удобно применить встроенную функцию **root(f(x), x, a, b)**.

Благодаря интерполяции, используя известные необходимые условия экстремума функции, без труда можно найти наибольшую высоту подъема частицы  $H$  или представить траекторию движения в координатной форме.

**Учет случайных параметров частиц грунта.** Рассматриваемая задача имеет существенно стохастический характер, обусловленный тем, что размеры частиц, их масса, коэффициент аэродинамического сопротивления и т.д. – случайные величины. Разработанная математическая модель движения при наличии опытных стохастических данных по параметрам частиц грунта позволяет производить исследования с учетом их случайности.

Не нарушая общности, будем полагать, что для случайных параметров плотности вероятностей имеют нормальное распределение [6] (рис. 3)

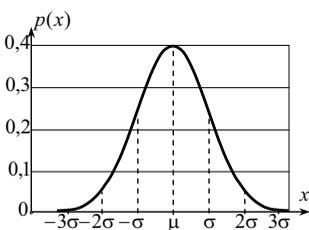


Рис. 3. Плотность вероятности нормального распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

где  $\mu$  – математическое ожидание;

$\sigma$  – среднеквадратическое отклонение.

В рассматриваемой задаче центральная предельная теорема может служить убедительным аргументом в пользу такого выбора.

Последовательность действий при учете

влияния случайного характера параметров частиц грунта на дальность их выбрасывания рассмотрим на примере случайного коэффициента аэродинамического сопротивления  $k$ . Задаемся математическим ожиданием  $\mu_k$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_k$  для  $k$ , формируем вектор  $N_k$  независимых случайных чисел, каждое из которых имеет нормальное распределение (в MathCAD удобно использовать для этих целей функцию **rnorm(N,  $\mu$ ,  $\sigma$ )**). Далее по разработанной математической модели осуществляем  $N_k$  расчетов дальности полета частиц грунта. Наглядный анализ полученных результатов целесообразно завершить построением гистограммы для дальности полета частиц грунта. В среде MathCAD для этих целей есть ряд средств. Наиболее универсальное – основано на применении функции **hist(intvls, x)**.

**Расчетные исследования движения частиц грунта.** Приведем некоторые результаты исследований движения частиц грунта с применением разработанной математической модели и случайным характером их параметров. Имитационное моделирование проводилось для частиц сферической формы ( $k=0,47$ ). Отметим, аэродинамический коэффициент сопротивления  $k$  существенно зависит от формы тела; пределы его изменения [4]:  $k=0,04$  – обтекаемое тело (капля);  $k \approx 1$  – пластинка, плоскость которой перпендикулярна скорости движения. Для площади поперечного сечения, очевидно, имеет место формула

$$S = \pi r^2, \text{ м}^2, \quad (11)$$

а для массы частицы

$$m = \gamma \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ кг}, \quad (12)$$

где  $\gamma$  – плотность грунта (плотность песчаных и глинистых грунтов  $\gamma = 1600 \div 2100 \text{ кг/м}^3$ ).

В расчетах принималось  $\gamma = 2000 \text{ кг/м}^3$ .

На рис. 4 показаны траектории движения частиц (радиус частицы  $r = 0,005 \text{ м}$ ) при изменении скорости схода  $v_0$  с лопатки с  $6 \text{ м/с}$  до  $30 \text{ м/с}$  (значение скорости в  $\text{м/с}$  указано над каждой кривой). Анализ траекторий показывает, что эффект возрастания дальности бросания частицы  $L$  с увеличением начальной скорости  $v_0$  уменьшается при больших значениях  $v_0$  – сказывается квадратичная зависимость сил сопротивления от скорости.

Аналогичные траектории (рис. 5) получены при варьировании радиусом частицы  $r$ , что сказывалось, очевидно, на площади поперечного сечения (11) и массе (12). Радиус менялся в пределах от  $0,0025 \text{ м}$  до  $0,025 \text{ м}$  с шагом  $0,0025 \text{ м}$  (на рисунке кривые пронумерованы в соответствующем порядке). Имеет место ярко выраженная тенденция – увеличение размера частицы, при прочих равных условиях, приводит к возрастанию дальности ее выбрасывания.

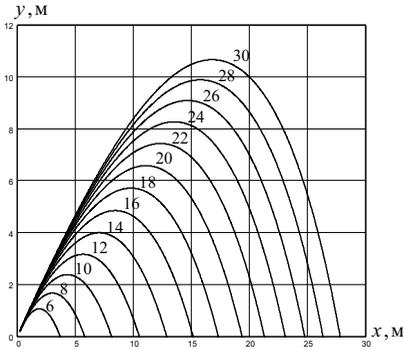


Рис. 4. Траектории полета частицы грунта в зависимости от  $v_0$  ( $\alpha_0=45^\circ$ )

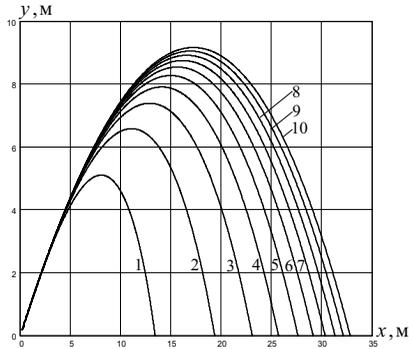


Рис. 5. Траектории полета частицы грунта в зависимости от радиуса ( $\alpha_0=45^\circ$ )

При проведении стохастических расчетов наибольший практический интерес представляют расчеты, учитывающие случайный характер коэффициента аэродинамического сопротивления. Ниже представлены результаты расчетов для частицы с  $r=0,005\text{м}$  и  $v_0=30\text{м/с}$ . Для математического ожидания и среднеквадратического отклонения брались значения соответственно  $\mu_k=0,47$  (сферическая форма частицы) и  $\sigma_k=0,14$ . При таком  $\sigma_k$  “перекрывается” практически весь диапазон возможных значений коэффициента аэродинамического сопротивления (тело обтекаемой формы – пластинка, плоскость которой перпендикулярна направлению движения).

В расчетах по изложенной выше методике бралось  $N_k=1000$  случайных значений  $k$ , распределенных по нормальному закону. Для указанных значений рассчитывались дальности вылета частиц и строилась гистограмма с равными интервалами (рис. 6) – график, аппроксимирующий по случайным данным плотность их распределения.

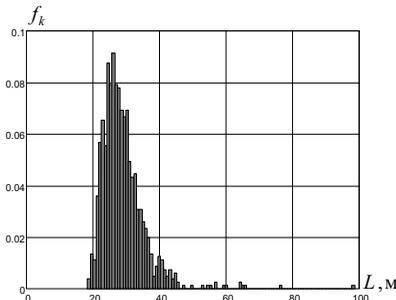


Рис. 6. Гистограмма дальности полета частиц грунта ( $\sigma_k=0,14$ )

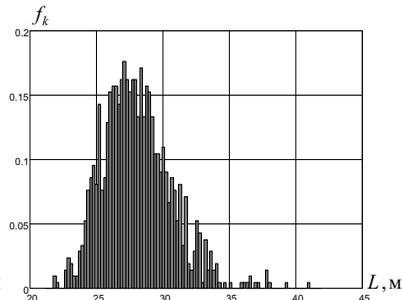


Рис. 7. Гистограмма дальности полета частиц грунта ( $\sigma_k=0,07$ )

Выборочное среднее значение  $\mu_L$  для дальности полета оказывается равным 29,3м, а среднеквадратическое (стандартное) отклонение  $\sigma_L - 6,72\text{м}$ .

На рис. 7 представлена гистограмма дальности полета частиц грунта для меньшего среднеквадратического отклонения  $\sigma_k=0,07$ . В этом случае  $\mu_L=28,2\text{м}$ , а  $\sigma_L=2,61\text{м}$ , т.е. существенно меньше, чем в предыдущем случае.

**Выводы.** 1. Разработана математическая модель движения частиц грунта, выбрасываемых роторным грунтометателем, при учете нелинейной зависимости сопротивления воздуха от скорости. 2. Предложен метод исследования влияния случайных параметров частиц грунта с произвольным распределением плотности вероятности на дальность выбрасывания. 3. Приведены результаты имитационного моделирования траекторий движения и дальности полета частиц грунта и дан их анализ.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение статистических характеристик параметров различных типов грунтов и их влияния на статистические показатели дальности вылета частиц.

## Литература

1. Семків О.М. Розрахунок робочого органа ланцюгового грунтометального механізму / Семків О.М., Шатохін В.М. // Міжвідомчий науково - технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”. Випуск 87.– К.: КНУБА, 2011.– С. 303-312.

2. Попова А.М. Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп’ютерних експериментів / Попова А.М., Шатохін В.М. // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип.4. – Т.54. – С.135-144.

3. Семків О.М. Дослідження траєкторії руху частки ґрунту після її вильоту з робочої поверхні лопатки роторного грунтометальника / Семків О.М., Попова А.М. // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип.4. – Т.54. – С.126-134.

4. Стрелков С.П. Механика.– / Стрелков С.П. - М.: Госуд. изд-во технико-теоретической литературы, 1956.– 456 с.

5. Кирьянов Д.В. Mathcad 13.– / Кирьянов Д.В. СПб.: ВХВ-Петербург, 2006.– 608 с.

6. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов.– / Гихман И.И., Скороход А. Д. - М.: Наука, 1965.– 656 с.

**ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ЧАСТОК ҐРУНТУ З ВИПАДКОВИМИ  
ПАРАМЕТРАМИ, ЩО ВИКИДАЄ РОТОРНИЙ ҐРУНТОМЕТАТЕЛЬ**

*В.М. Шатохін, Н.В. Шатохіна, А.М. Попова.*

Розроблено математичну модель руху часток ґрунту, що викидаються роторним ґрунтометателем, у припущенні квадратичної залежності сил опору повітря від швидкості. Запропоновано метод дослідження впливу випадкових параметрів часток ґрунту (форми, розміру і т.д.) з довільною щільністю імовірності розподілу на дальність викидання. Приведено результати імітаційного моделювання траєкторій руху і дальності польоту часток ґрунту.

**STUDING OF SOIL PARTICLES MOVEMENT WITH RANDOM  
PARAMETERS THAT ARE THROWN BY ROTOR GROUND THROWER**

*V.M. Shatokhin, N.V. Shatokhina, A.N. Popova.*

Mathematical model of soil particles moving, that are thrown by the rotor ground thrower in suggestion of the square-law dependency of air resistance from velocity. Research technique for influence of soil particles random parameters (shape, dimensions, etc.) with free distributional law on distance of ejection is offered. The results of simulation modeling of motion paths and soil particles flight range are described.