

КОМБІНАТОРНО-ВАРІАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБВОДІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

НТУУ “Київський політехнічний інститут”, Україна

Розглянуто комбінаторно-варіаційне моделювання складених ліній. Запропонований підхід проілюстровано на прикладі кривих другого порядку у векторній раціональній параметричній формі. Визначено перспективи даного методу у випадку застосування інших кривих.

Постановка проблеми. Успіх автоматизованої розробки оптимальних зразків техніки в багатьох випадках суттєво залежить від здатності комп'ютерних геометричних моделей ефективно генерувати проектні різновиди опрацьовуваних об'єктів. Тому удосконалення математичних методів варіантного формоутворення є важливою науковою проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичні питання твердотілого моделювання виробів машинобудування на засадах комбінаторно-варіаційного підходу з використанням кривих другого порядку розглянуто у праці [1], а приклади комп'ютерної реалізації наведено у виданні [2].

Цілі статті. Подати матеріали щодо комбінаторно-варіаційного формоутворення обводів, складених із дуг кривих другого порядку.

Основна частина. З точки зору теорії множин для побудови ліній вихідними фігурами є точки, наприклад, у вигляді кортежу

$$P = (P_i)_0^n, \quad (1)$$

де P_i – радіус-вектор i -ї точки у прямокутній системі координат Oxy або $Oxyz$, n – натуральне число (див. рис. 1).

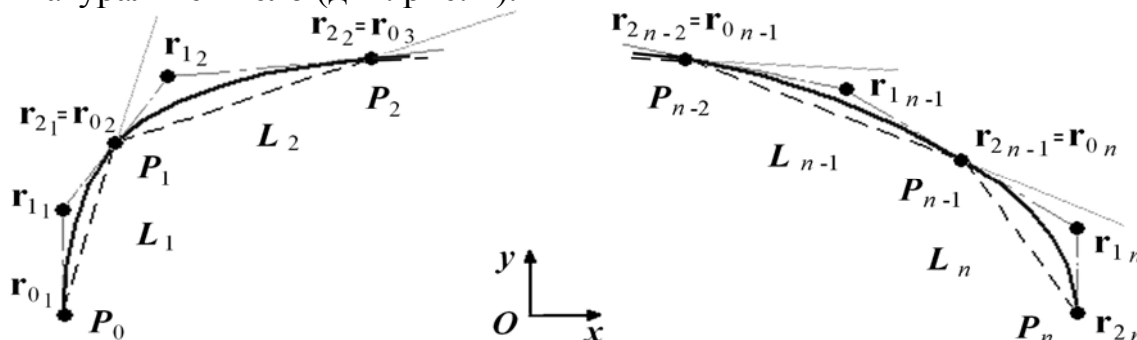


Рис. 1. Складений з дуг кривих другого порядку обвід, що інтерполює $(P_i)_0^n$

Вихідну множину (1) можна інтерполювати за допомогою n дуг кривих другого порядку, що згідно з [3, 4] мають вигляд

$$L_i = r_i(u_i) = \frac{(1-u_i)^2 r_{0i} + w_{1i} 2u_i(1-u_i)r_{1i} + u_i^2 r_{2i}}{(1-u_i)^2 + w_{1i} 2u_i(1-u_i) + u_i^2}, \quad (2)$$

де r_{0i} , r_{1i} , r_{2i} – радіуси-вектори вершин їх характеристичних трикутників, $w_{1i} \geq 0$ – вагові коефіцієнти вершин r_{1i} , $u_i \in [0, 1]$ – параметри.

У цьому випадку створений складений обвід подається кортежем

$$L = (L_i)_1^n, \quad (3)$$

де L_i – крива вигляду (2).

Ця формула справедлива на площині та у просторі. Для гладкості першого порядку необхідно щоб в інтерпольованих точках P_i , де $i \in (1, \dots, n-1)$, вектори $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ та $\mathbf{r}_{0i+1} \mathbf{r}_{1i+1}$ були колінеарними. Структурі (3) відповідає нескінченна кількість її параметричних варіантів, які одержуємо варіаціями напрямів дотичних у точках P_i , де $i \in (0, \dots, n)$, та вагових коефіцієнтів w_{1i} у вершинах \mathbf{r}_{1i} , де $i \in (1, \dots, n)$.

Кривою (2) можуть інтерполюватися не тільки дві, а і три вихідні точки. При створенні обводу першого порядку гладкості ця властивість повною мірою використовується лише на площині, оскільки спільна дотична двох суміжних дуг кривих другого порядку та дві наступні інтерпольовані вихідні точки, при довільному їх положенні у просторі, не лежать в одній площині, що необхідно для побудови чергової дуги. Тому розглядатимемо далі формування складених обводів першого порядку гладкості, які інтерполюють опуклу множину точок на площині. Лінії з перегинами утворюватимемо об'єднанням кривих різної опуклості.

Отже, побудова нового комбінаторно-варіаційного варіанта гладкого складеного опуклого плоского обводу, який інтерполює множину (1) і використовує вже сполуки не двох, а трьох вихідних точок, базується на задачі інтерполяції дугою кривої другого порядку розташованої всередині її характеристичного трикутника точки. Таке завдання досліджується в роботі [5] і зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Нами, шляхом проведення додаткового аналізу цієї задачі, отримано аналітичні розв'язки, що суттєво спрощує їх подальше теоретичне використання та підвищує обчислювальну продуктивність практичного застосування.

Задача 1. У прямокутній системі координат $Oxuz$ для радіусів-векторів $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ вершин характеристичного трикутника дуги кривої $\mathbf{r}(u)$ другого порядку та точки $P(x_p, y_p, z_p)$ всередині цього трикутника необхідно знайти коефіцієнт w_1 , який забезпечує проходження даної кривої через зазначену точку, й обчислити параметр u останньої.

Розв'язок. На підставі виразу (2) проходження дуги кривої другого порядку через точку P записується наступним чином

$$\begin{cases} (x_p - x_0)(1-u)^2 + (x_p - x_1)w_1 2u(1-u) + (x_p - x_2)u^2 = 0, \\ (y_p - y_0)(1-u)^2 + (y_p - y_1)w_1 2u(1-u) + (y_p - y_2)u^2 = 0, \\ (z_p - z_0)(1-u)^2 + (z_p - z_1)w_1 2u(1-u) + (z_p - z_2)u^2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Система рівнянь (4) з невідомими $(1-u)^2$, $w_1 2u(1-u)$, u^2 однорідна та має нульовий визначник, оскільки останній відтворює належність точки P площині $\mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$. Нульовий розв'язок системи не дає потрібних u та w_1 .

Застосуємо позначення

$$\begin{aligned}
c_1 &= (x_p - x_1)(y_p - y_2) - (x_p - x_2)(y_p - y_1), \\
c_2 &= (x_p - x_2)(y_p - y_0) - (x_p - x_0)(y_p - y_2), \\
c_3 &= (x_p - x_0)(y_p - y_1) - (x_p - x_1)(y_p - y_0).
\end{aligned} \tag{5}$$

З використанням співвідношень (5) розв'язки системи (4) подамо як

$$(1 - u)^2 = c_1 t, \quad w_1 2u(1 - u) = c_2 t, \quad u^2 = c_3 t, \tag{6}$$

де t – довільне число.

Константи c_1, c_2, c_3 не дорівнюють нулю, оскільки точка P лежить усередині характеристичного трикутника $r_0 r_1 r_2$. Ця умова на площині $r_0 r_1 r_2$ подається як однаковість знаків векторних добутків $[r_0 - r_P, r_1 - r_P]$, $[r_1 - r_P, r_2 - r_P]$, $[r_2 - r_P, r_0 - r_P]$, що аналогічно сталості знаків констант c_1, c_2, c_3 .

З формул (6) одержуємо

$$\begin{cases} (c_1 / c_3 - 1)u^2 + 2u - 1 = 0, \\ w_1 = c_2 u / (c_3 2(1 - u)). \end{cases} \tag{7}$$

У випадку $c_1 \neq c_3$ перше рівняння системи (7) є квадратним із коренем

$$u = 1 / (1 + \sqrt{c_1 / c_3}), \tag{8}$$

що належить інтервалу від 0 до 1 та задовольняє також умові $c_1 = c_3$.

Згідно з виразами (7) та (8) відповідна величина вагового коефіцієнта

$$w_1 = c_2 / (2c_3 \sqrt{c_1 / c_3}). \tag{9}$$

Нехай потрібно на площині апроксимувати точки (1), де $n \geq 3$, m дугами кривих другого порядку (2). Тоді отримана лінія подається множиною

$$L = (L_j)_1^m, \tag{10}$$

де $1 \leq m \leq [n/3]$.

Це завдання зводиться до апроксимації кортежів, див. рис. 2,

$$A_j = (P_k)_{k1+1}^{k1+k2-1}, \tag{11}$$

де $k1 \in \{0 \cup (3, \dots, n - 3)\} \wedge k2 \geq 3 \wedge ((k1 + k2) \leq n - 3 \vee (k1 + k2) = n)$, $1 \leq j \leq m$.

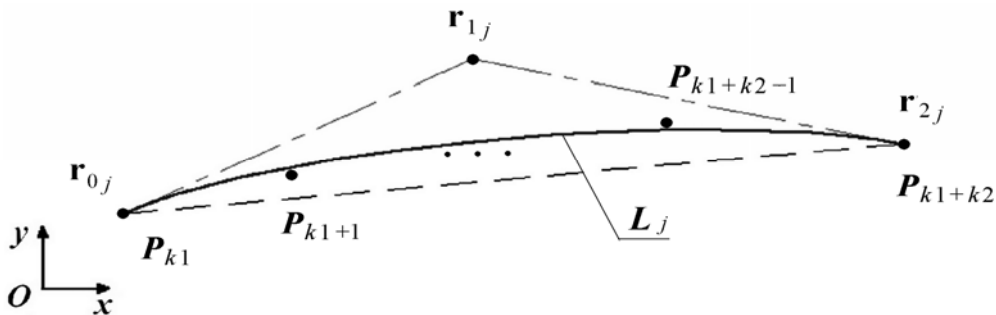


Рис. 2. Апроксимація дугою кривої другого порядку множини точок A_j

Розв'язок показаної на рис. 2 задачі спирається на запропонований обчислювальний алгоритм 1 визначення мінімальної відстані від точки до параметричної лінії, який містить наступні п'ять пунктів.

1. Для точки $P(x_p, y_p, z_p)$ та лінії $r(u)$, де $u \in [0, 1]$, обирається потрібне допустиме відхилення ε поточної дуги цієї кривої від апроксимуючого її прямолінійного відрізка, мінімальна кількість N_{\min} таких дуг та максимальне число N_{\max} необхідних розв'язків, за початковий з яких приймається

відстань $|\mathbf{r}(0)-\mathbf{P}|$. Діленням проміжку параметра на N_{\min} розраховується його поточний приріст, встановлюються позначки дії режимів зменшення відстані від точки \mathbf{P} до кривої та доданого розв'язку.

2. Для поточної дуги, яка визначена початковим $u_{\text{п}}$ та кінцевим $u_{\text{к}}=u_{\text{п}}+\Delta u$ значеннями параметра, де Δu – його приріст, обчислюється відстань h від $\mathbf{r}(u_{\text{п}}+\Delta u/2)$ до $\mathbf{r}(u_{\text{п}})\mathbf{r}(u_{\text{к}})$ і порівнюється з ε , тобто

$$h \leq \varepsilon. \quad (12)$$

Якщо співвідношення (12) хибне, то Δu зменшується поділом навпіл до перетворення даного виразу в істинний. Далі виконується пункт 3.

3. Якщо $|\mathbf{r}(u_{\text{к}})-\mathbf{P}|=|\mathbf{r}(u_{\text{п}})-\mathbf{P}|$, то переходимо до другого абзацу пункту 4, але у випадку дії режиму доданого розв'язку спочатку виконуємо перший абзац зазначеного пункту. Інакше цей режим відмінюється.

За умови дії режиму зменшення відстані від точки \mathbf{P} до кривої та $|\mathbf{r}(u_{\text{к}})-\mathbf{P}|>|\mathbf{r}(u_{\text{п}})-\mathbf{P}|$ фіксується можливий розв'язок $u_{\text{к}}$, який уточнюється подрібненням поточної величини Δu і проведенням аналізу щодо подальшої мінімізації відстані до точки \mathbf{P} в околі $\mathbf{r}(u_{\text{к}})$. З обчисленням u_* переходимо до пункту 4. Коли $|\mathbf{r}(u_{\text{к}})-\mathbf{P}|<|\mathbf{r}(u_{\text{п}})-\mathbf{P}|$, то прямуємо до другого абзацу пункту 4.

За умови дії режиму збільшення відстані від точки \mathbf{P} до кривої переходимо до другого абзацу пункту 4, але для $|\mathbf{r}(u_{\text{к}})-\mathbf{P}|<|\mathbf{r}(u_{\text{п}})-\mathbf{P}|$ перед цим встановлюємо дію режиму зменшення відстані від точки \mathbf{P} до кривої.

4. Додавання розв'язку u_* виконується так. Якщо величина відповідної відстані L_* більша тих, що в масиві розв'язків, то вона ігнорується; коли дорівнює їм і ще не перевищено N_{\max} , то разом з u_* додається в масив; якщо ж менша тих, що в масиві, то L_* та u_* заміщують його весь.

Здійснюється приріст $u_{\text{п}}$ поточної дуги на величину Δu . Після цього, крім випадку досягнення значення $u=1$, переходимо до пункту 2, інакше – до пункту 5, але для режиму зменшення відстані від точки \mathbf{P} до даної лінії та $|\mathbf{r}(u_{\text{к}})-\mathbf{P}|<|\mathbf{r}(u_{\text{п}})-\mathbf{P}|$ перед цим виконуємо перший абзац пункту 4 зі значенням $u_*=1$.

5. Завершення обчислень.

Тепер сформулюємо наведену на рис. 2 задачу апроксимації та викладемо запропонований спосіб її розв'язування.

Задача 2. Для точок $(\mathbf{P}_k)_1^p$, де $p \geq 2$, які знаходяться всередині характеристичного трикутника $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ кривої другого порядку, необхідно розрахувати ваговий коефіцієнт w_1 , що забезпечує проходження даної кривої з мінімальним відхиленням δ від цієї множини, де

$$\delta = \max(L_1, \dots, L_p), \quad (13)$$

L_k – мінімальна відстань від точки \mathbf{P}_k до кривої.

Розв'язок. За допомогою залежності (9) для $(\mathbf{P}_k)_1^p$ знаходимо w_{1k} , які реалізують проходження заданої характеристичним трикутником кривої другого порядку через ці точки. Отримуємо проміжок $w_1 \in [w_{1\min}, w_{1\max}]$ для обчислення методами математичного програмування мінімуму виразу (13)

шляхом варіювання величини w_1 і застосування алгоритму 1.

Отже, формули (1), (2), (10) і (11) описують комбінаторно-варіаційний геометричний об'єкт, який складається з певних уніфікованих структурно-параметричних фігур. Цілі його формоутворення можуть бути досить різними, наприклад, побудова неперервного обводу, що апроксимує вихідні точки з найменшими відхиленнями, забезпечує гладкість першого порядку, реалізує потрібні напрями дотичних у заданих точках, має мінімальну кількість своїх структурних компонентів і т. д. У загальному випадку зазначені вимоги часто мають суперечливий характер. Формалізація та уніфікація структурно-параметричних елементів геометричних моделей у комбінаторно-варіаційному аспекті дозволяє підвищити ефективність автоматизованого проектування відображуваних за допомогою них об'єктів.

Проілюструємо далі подані теоретичні положення на конкретному прикладі. Нехай необхідно апроксимувати наведені в табл. 1 дані.

Таблиця 1

Координати фрагмента аеродинамічного профілю NASA-0012

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|------|------|-----|------|------|------|------|----|-----|------|------|------|------|
| x | 2,5 | 5 | 7,5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| y | 2,62 | 3,56 | 4,2 | 4,68 | 5,34 | 5,74 | 5,94 | 6 | 5,8 | 5,29 | 4,56 | 3,66 | 2,62 |

Для характеристичного трикутника з радіусами-векторами вершин $r_0(2,5; 2,62)$, $r_1(16, 17)$, $r_2(80; 2,62)$ розрахований ваговий коефіцієнт $w_1=0,268385$ дає відхилення $\delta=0,4456$. Точність апроксимації підвищується наданням деякого ступеня свободи вершині r_1 . Так варіювання її положення в допустимій прямокутній області з координатами лівого нижнього (8, 14) та правого верхнього (24, 20) кутів забезпечує відхилення $\delta=0,2585$ при $r_1(10, 14)$ та $w_1=0,382995$.

Такі результати застосування варіаційних компонентів лише одного структурного елемента ($m=1$) множини (10), для якого

$$A_1 = (P_k)_{k1+1}^{k1+k2-1} = (P_k)_{0+1}^{0+12-1} = (P_k)_1^{11}$$

згідно з формулою (11).

Розглянемо розв'язування досліджуваної задачі, але з використанням уже двох елементів у кортежі (10). Нехай маємо

$$\begin{aligned} A_1 &= (P_k)_{k1+1}^{k1+k2-1} = (P_k)_{0+1}^{0+7-1} = (P_k)_1^6, \\ A_2 &= (P_k)_{k1+1}^{k1+k2-1} = (P_k)_{7+1}^{7+5-1} = (P_k)_8^{11}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для цих множин відповідне зображення показано на рис. 3.

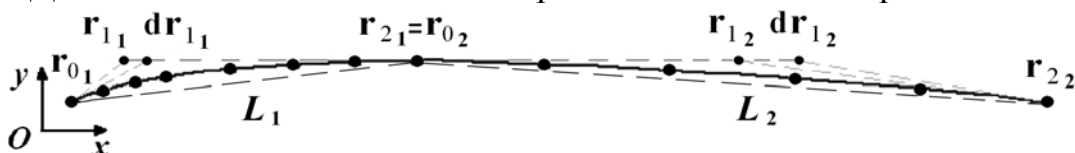


Рис. 3. Апроксимація фрагмента профілю NASA-0012 двома дугами

З виразів (14) видно, що число елементів у кортежах дорівнює $k2-1$ і поєднані вони точкою P_7 , яка має найбільшу ординату. Тому в ній зафіксовано горизонтальну дотичну до модельованої складеної лінії.

Будуватимемо обвід, що апроксимує вихідні точки з мінімальним

відхиленням, забезпечує при цьому гладкість першого порядку та реалізує потрібні напрями дотичних у заданих точках. На рис. 3 через r_{11} і dr_{11} та r_{12} і dr_{12} позначено початки та кінці векторів варіювання положення відповідно вершин r_{11} і r_{12} дуг кривих другого порядку L_1 та L_2 , яке здійснюється методами математичного програмування. За умов $r_{11}(6,7; 6)$ і $dr_{11}(8,5; 6)$ та $r_{12}(55; 6)$ і $dr_{12}(60; 6)$ отримано наступні розв'язки $r_{11}(8,397; 6)$, $w_{11}=0,78902$, $\delta_1=0,0397$ та $r_{12}(56,596; 6)$, $w_{12}=0,495672$, $\delta_2=0,0679$. Порівняльний аналіз цих результатів (максимальне відхилення $\delta=0,0679$) із попередніми ($\delta=0,2585$) засвідчує суттєве підвищення точності апроксимації. Таким чином, у даному випадку ускладнення структури комбінаторно-варіаційного геометричного об'єкта є доцільним задля підвищення якості формоутворення. Якщо досягнуте нове відхилення не задовольняє наявним вимогам, то потрібно й надалі застосовувати подані вище прийоми геометричного моделювання, зокрема, збільшення числа структурних елементів у множині (10). Відповідний приклад для кортежу

$$L = (L_j)_1^4 \quad (15)$$

показано на рис. 4, де трикутники – це кінцеві точки дуг.

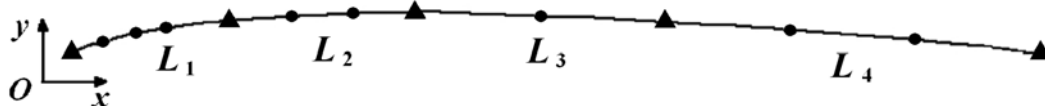


Рис. 4. Варіант апроксимації чотирма дугами кривих другого порядку

У наведеному випадку для:

$L_1 - r_{01}(2,5; 2,62)$, $r_{11}(4,825; 4,274)$, $dr_{11}(5,837; 4,38)$, $r_{21}(15; 5,34) - r_{11}(5,624; 4,358)$, $w_{11}=0,847154$, $\delta_1=0,0139$;

$L_2 - r_{02}(15; 5,34)$, $r_{12}(21,3; 6)$, $r_{22}(30; 6) - w_{12}=1,013435$, $\delta_2=0,0015$;

$L_3 - r_{03}(30; 6)$, $r_{13}(38,3; 6)$, $r_{23}(50; 5,29) - w_{13}=1,130219$, $\delta_3=0$;

$L_4 - r_{04}(50; 5,29)$, $r_{14}(68,786; 4,15)$, $dr_{14}(71,258; 4)$, $r_{24}(80; 2,62) - r_{14}(70,005; 4,076)$, $w_{14}=0,427183$, $\delta_4=0,0126$.

Отже, тепер відхилення $\delta=0,0139$. Його нульове значення можна отримати, прийнявши у виразі (3), наприклад, $n=6$. Однак, при цьому недоцільно ускладнюється геометрична модель, особливо за потреби коригування її вихідних експериментальних даних.

Для множини (15), крім поданих на рис. 4, існують й інші варіанти, генерування яких варто здійснювати автоматизованим способом, прагнучи не до простого їх перебору, а визначення раціональних послідовностей.

Перспективним напрямком комбінаторно-варіаційного формоутворення складених обводів є криві вищих порядків, які реалізують відповідну гладкість створюваних ліній.

Висновки. У даній роботі викладено комбінаторно-варіаційний підхід до геометричного моделювання складених ліній, який проілюстровано на прикладі застосування дуг кривих другого порядку. Запропонований

метод сприяє підвищенню ефективності автоматизованого варіантного формоутворення технічних об'єктів.

Перспективи подальших досліджень полягають у докладному опрацюванні застосування для комбінаторно-варіаційного геометричного моделювання обводів також й інших, крім кривих другого порядку, ліній.

Література

1. *Вірченко В.Г.* Твердотільне геометричне комп'ютерне моделювання об'єктів машинобудування на засадах комбінаторно-варіаційного підходу / В.Г. Вірченко // Праці Тавр. держ. агротех. універ. – Вип. 4. Прикл. геом. та інж. графіка. – Т. 54. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 27-31.

2. *Камаєв Ю.М.* Автоматизоване комбінаторно-варіаційне геометричне моделювання деталей машинобудування в системі Solidworks / Ю.М. Камаєв, В.Г. Вірченко, С.Г. Вірченко // Праці Тавр. держ. агротех. універ. – Вип. 4. Прикл. геом. та інж. графіка. – Т. 55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 99-103.

3. *Фокс А.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

4. *Роджерс Д.* Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.

5. *Надолинный В.А.* Аналитические методы в конструировании поверхностей / В.А. Надолинный. – К.: КПИ, 1981. – 43 с.

КОМБИНАТОРНО-ВАРИАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБВОДОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.Г. Вірченко

В статье рассмотрено комбинаторно-вариационное моделирование составных линий. Предложенный подход проиллюстрирован на примере кривых второго порядка в векторной рациональной параметрической форме. Определены перспективы этого метода в случае применения других кривых.

COMBINATORIAL-VARIATION CONTOURS MODELING WITH USING OF SECOND-ORDER CURVES

V. Virchenko

The article considers the combinatorial-variation modelling of composite lines. The proposed approach is illustrated by the curves of second order in the vector rational parametric form. The prospects of this method in the case of other curves are defined.