УДК 514.18

О.В. Воронцов, к.т.н., доц.

ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ ОБ'ЄКТІВ БУДІВНИЦТВА ОДНОВИМІРНИМИ ЧИСЛОВИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ ІЗ НЕРІВНОМІРНИМ КРОКОМ

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, Україна

Показано можливості використання одновимірних числових послідовностей із нерівномірним кроком для дискретного геометричного моделювання криволінійних образів. Розглянуто визначення полінома n-го степеня довільними дискретними значеннями.

Постановка проблеми. В процесі проектування сучасних об'єктів будівництва, архітектури, машинобудування, важливе місце займає етап геометричного моделювання, коли на стадії ескізу визначаються основні параметри їх геометричної форми. При цьому якість моделі залежить від можливості ефективного управління їх геометрією, коректування як моделей в цілому, так і їх окремих частини, швидкого аналізу і порівняльної оцінки отриманих результатів.

В основі класичного методу скінчених різниць, на який спираються найпростіші способи дискретної інтерполяції лежить поліном ***n***-го степеня

$$y = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + ... + m_k x^k + ... + m_n x^n \qquad (1)$$

дискретним аналогом якого є одновимірна числова послідовність

$$a_i = m_0 + m_1 i + m_2 i^2 + m_3 i^3 + ... + m_k i^k + ... + m_n i^n \qquad (2)$$

Для наочності скінчені різниці часто представляють у вигляді різницевих операторів. Всі лінійні різницеві оператори можна отримати з (**1**) як залежність між відповідними координатами групи суміжних вузлів [1].

Вираз (**2**) можна подати і рекурентними формулами. Скінчені різниці можна інтерпретувати як рекурентні формули нескінчених числових послідовностей [2].

Якщо криволінійний геометричний образ моделюється одновимірною нескінченою числовою послідовністю, то в ряді випадків можна перейти від рекурентної залежності, яка повторює скінчено-різницевий оператор, до замкненої форми, а далі й до аналітичного опису кривої, замінивши дискретні параметри числової послідовності неперервними.

Ефективність методик формування геометричних образів у великій мірі залежить від ефективності алгоритмів переходу від неперервної форми представлення геометричних образів до їх дискретних аналогів і навпаки.

Вищеназвані алгоритми розроблені у [2] за допомогою математичного апарату числових послідовностей. Координати вузлів модельованих дискретних аналогів кривих визначаються за відомими координатами суміжних вузлів. Дискретно представлені криві (ДПК) подаються координатами вузлів із рівномірним кроком по осі.

Дані алгоритми можуть бути значно ефективніші за рахунок економії обчислювальних ресурсів при формуванні ДПК вузлами із довільними кроками по осі за даними координатами довільних вузлів.

Аналіз останніх досліджень. У всіх попередніх роботах присвячених питанням дослідження рекурентних формул числових послідовностей для дискретного моделювання і формування дискретних образів та проаналізованих у [3], для визначення координат точок ДПК використовуються координати точок суміжних вузлів і ДПК задаються із рівномірним кроком по осі.

Підхід до визначення поліномів 1-го, 2-го, 3-го степенів одновимірними числовими послідовностями за координатами довільних вузлів розглянуто у роботі [3].

Постановка завдання. Мета роботи – дослідження питань дискретної інтерполяції геометричних образів одновимірними числовими послідовностями за координатами вузлових точок взятих із довільним кроком по координаційній осі, а саме – визначення полінома n-го степеня довільними дискретними значеннями.

Виклад основного змісту дослідження Відповідно до запропонованого в [3] підходу, для вищезазначеної послідовності (**2**) рекурентна залежність матиме вигляд

$$a_{i+p}=\alpha_1 a_{i+p_1}+\alpha_2 a_{i+p_2}+\alpha_3 a_{i+p_3}+\ldots+\alpha_k a_{i+p_k}+\ldots+ \\ +\alpha_n a_{i+p_n}+\alpha_{n+1} a_{i+p_{n+1}}, \qquad (3)$$

де вирази для обчислення показників α_1, α_2, α_3, α_k, α_n, α_{n+1} можемо одержати розв'язавши відповідні системи рівнянь подібні наведеним у [3]

Наприклад, для послідовності другого порядку $a_i=m_0+m_1 i+m_2 i^2$:

$$a_{i+p}=\alpha_1 a_{i+p_1}+\alpha_2 a_{i+p_2}+\alpha_3 a_{i+p_3} .$$

Одержимо вирази для визначення α_1, α_2, α_3 :

$$\alpha_1=\frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta}=\frac{2m_2^2(p_2-p)(p_3-p)(p_3-p_2)}{2m_2^2(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2)}=\frac{(p-p_2)(p-p_3)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)} ;$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = \frac{2m_2^2(p-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p)}{2m_2^2(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2)} = \frac{(p-p_1)(p-p_3)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)}\ ; \qquad (\mathbf{4})$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta} = \frac{2m_2^2(p_2-p_1)(p-p_1)(p-p_2)}{2m_2^2(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2)} = \frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)}\ .$$

І тому рекурентна залежність матиме вигляд:

$$a_{i+p} = \frac{(p-p_2)(p-p_3)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)} a_{i+p_1} + \frac{(p-p_1)(p-p_3)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)} a_{i+p_2} + \qquad (\mathbf{5})$$

$$+ \frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)} a_{i+p_3}\ .$$

Для послідовності ***n***-го степеня (**2**) :

$$\alpha_1 = (-1)^n \frac{(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)...(p-p_k)...(p-p_n)(p-p_{n+1})}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_4-p_1)...(p_k-p_1)...(p_n-p_1)(p_{n+1}-p_1)}\ ;$$

$$\alpha_2 = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_3)(p-p_4)...(p-p_k)...(p-p_n)(p-p_{n+1})}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)(p_4-p_1)...(p_k-p_2)...(p_n-p_2)(p_{n+1}-p_2)}\ ;$$

$$\alpha_3 = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_4)...(p-p_k)...(p-p_n)(p-p_{n+1})}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)(p_4-p_3)...(p_k-p_3)...(p_n-p_3)(p_{n+1}-p_3)}\ ;$$

....;

$$\alpha_k = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)...(p-p_{k-1})(p-p_{k+1})...}{(p_1-p_k)(p_2-p_k)(p_3-p_k)(p_4-p_k)...(p_{k-1}-p_k)(p_{k+1}-p_k)...}$$

$$\frac{...(p-p_n)(p-p_{n+1})}{...(p_n-p_k)(p_{n+1}-p_k)}\ ;$$

....; (**6**)

$$\alpha_n = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)...(p-p_k)...}{(p_1-p_n)(p_2-p_n)(p_3-p_n)(p_4-p_n)...(p_k-p_n)...}$$

$$\frac{...(p-p_{n-1})(p-p_{n+1})}{...(p_{n-1}-p_n)(p_{n+1}-p_n)}\ ;$$

$$\alpha_{n+1} = (-1)^n \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)...(p-p_k)...}{(p_1-p_{n+1})(p_2-p_{n+1})(p_3-p_{n+1})(p_4-p_{n+1})...(p_k-p_{n+1})...}$$

$$\frac{...(p-p_{n-1})(p-p_n)}{...(p_{n-1}-p_{n+1})(p_n-p_{n+1})} .$$

Перевірмо вірність виведених формул на конкретному прикладі. Розглянемо спочатку визначення аналітичного виразу полінома другого степеня

$$y = m_0 + m_1 x + m_2 x^2$$

за трьома заданими точками A, B, C із наступними координатами:

$$A(1, 5);\ B(2, 1);\ C(5, 3).$$

Одержуємо аналітичний вираз даного поліному:

$$y = \frac{136}{12} - \frac{90}{12}x + \frac{14}{12}x^2 \Rightarrow \quad y = \frac{34}{3} - \frac{15}{2}x + \frac{7}{6}x^2,$$

і, відповідно, числової послідовності:

$$a_i = \frac{34}{3} - \frac{15}{2}i + \frac{7}{6}i^2$$

Ряд значень даної послідовності наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	11,33	5	1	-0,67	0	3	8,33	16	26	38,33	53	70

Визначимо α_{i+p} за такими даними: $p=1;\ p_1=3;\ p_2=7;\ p_3=10.$

$$a_{i+1} = \frac{(7-1)(10-1)}{(7-3)(10-3)}a_{i+3} + \frac{(1-3)(10-1)}{(7-3)(10-7)}a_{i+7} + \frac{(1-3)(1-7)}{(10-3)(10-7)}a_{i+10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{i+1} = \frac{27}{14}a_{i+3} - \frac{3}{2}a_{i+7} + \frac{4}{7}a_{i+10} .$$

При $i=0$:

$$a_1 = \frac{27}{14}a_3 - \frac{3}{2}a_7 + \frac{4}{7}a_{10} ;$$

За наведеними у таблиці даними: $a_1=5;\ a_3=-0,67;\ a_7=16;\ a_{10}=53;$

Тому:

$$5 = \frac{27}{14}\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{2}16 + \frac{4}{7}53 \quad \Rightarrow 5 = 5 ;$$

При $i=1$:

$$a_2 = \frac{27}{14}a_4 - \frac{3}{2}a_8 + \frac{4}{7}a_{11} \quad ;$$

За наведеними у таблиці даними: $a_2=1; a_4=0; a_8=26; a_{11}=70;$
Тому:

$$1 = \frac{27}{14}0 - \frac{3}{2}26 + \frac{4}{7}70 \quad \Rightarrow 1 = 1 \quad .$$

Розглянемо наступний приклад. Для визначеності будемо вважати, що крива задана рівнянням $y = 1 + 2x + 3x^2 - 2x^3 + 4x^4$, отже при $x=i$ $(i=1,2,3,\ldots)$ маємо послідовність точок $A_i\,(i, a_i)$ на цій кривій, де

$$a_i = 1 + ix + 3i^2 - 2i^3 + 4i^4 \qquad (3)$$

Задамо на кривій точки $A(i+p1, ai+p_1)$, $B(i+p2, ai+p_2)$, $C(i+p3, ai+p_3)$, $D(i+p4, ai+p_4)$, $E(i+p5, ai+p_5)$, $M(i+p, ai+p)$, де $i=0$, $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=3$, $p_4=6$, $p_5=7$, $p=4$, тобто точки $A(1, a1)$, $B(2, a2)$,
$C(3, a3)$, $D(4, a6)$,
$E(5, a7)$ (рис.1). Треба знайти такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, щоб для точки $M(i+p, ai+p)$, тобто $M(4, a4)$ мала місце рівність

$$a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_6 + \alpha_5 a_7 \; .$$

Формули для обчислення показників α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 за записаними вище формулами матимуть вигляд:

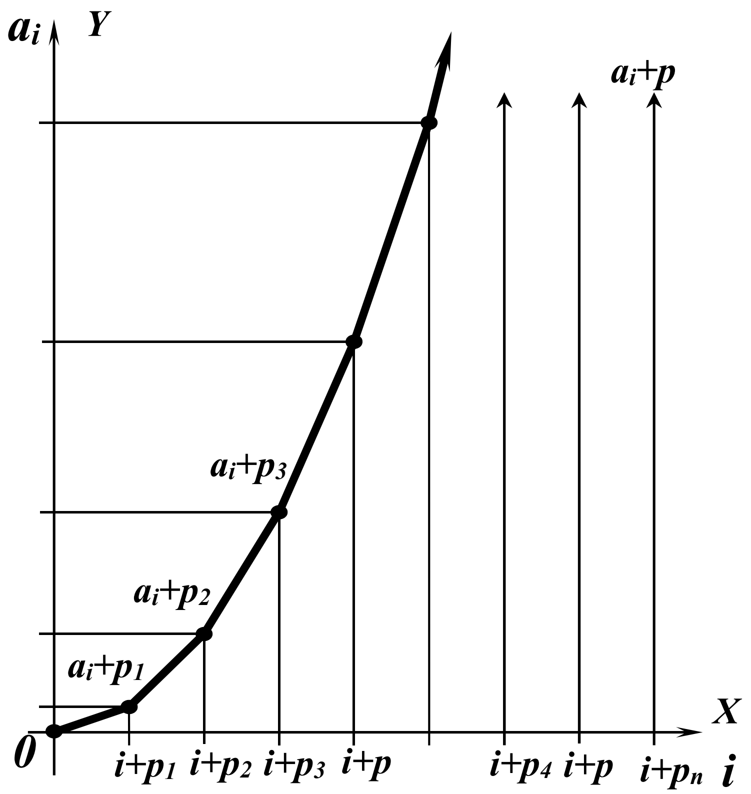

Рис. 1

$$\alpha_1 = (-1)^4 \frac{(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_4-p_1)(p_5-p_1)} =$$

$$= \frac{(4-2)(4-3)(4-6)(4-7)}{(2-1)(3-1)(6-1)(7-1)} = 0,2 \ ;$$

$$\alpha_2 = (-1)^4 \frac{(p-p_1)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)(p_4-p_2)(p_5-p_2)} =$$

$$= \frac{(4-1)(4-3)(4-6)(4-7)}{(1-2)(3-2)(6-2)(7-2)} = -0,9 \ ;$$

$$\alpha_3 = (-1)^4 \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_4)(p-p_5)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)(p_4-p_3)(p_5-p_3)} =$$

$$= \frac{(4-1)(4-2)(4-6)(4-7)}{(1-3)(2-3)(6-3)(7-3)} = 1,5 \ ;$$

$$\alpha_4 = (-1)^4 \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_5)}{(p_1-p_4)(p_2-p_4)(p_3-p_4)(p_5-p_4)} =$$

$$= \frac{(4-1)(4-2)(4-3)(4-7)}{(1-6)(2-6)(3-6)(7-6)} = 0,3 \ ;$$

$$\alpha_5 = (-1)^4 \frac{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)}{(p_1-p_5)(p_2-p_5)(p_3-p_5)(p_4-p_5)} =$$

$$= \frac{(4-1)(4-2)(4-3)(4-6)}{(1-7)(2-7)(3-7)(6-7)} = -0,1 \ ;$$

Отже маємо такий вираз через лінійну комбінацію $a_1, a_2, a_3, a_6,$ і a_7, :

$$a_4 = 0,2a_1 - 0,9a_2 + 1,5a_3 + 0,3a_6 - 0,1a_7 \qquad (7)$$

Відповідно до заданої послідовності (**3**) : $a_4=937$, $a_1=4$, $a_2=57$, $a_3=292$, $a_6=4849$, $a_7=9052$ **.** Підставивши ці значення у (**4**) , матимемо тотожність:

$$937 = 0,2 \times 4 - 0,9 \times 57 + 1,5 \times 292 + 0,3 \times 4849 - 0,1 \times 9052 \ ,$$

тобто: $937 = 937$ **.**

Висновки. Для геометричного моделювання дискретних образів об’єктів будівництва можуть бути застосовані дані дослідження переходу від замкненої до рекурентної форми задання числових послідовностей довільними дискретними значеннями.

Література

1. Ковальов С.М. Дискретна інтерполяція нелінійними різницевими операторами / С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 207-211.
2. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями. Дис. д-ра техн. Наук: 05.01.01 / КНУБА. – К.: 2006.
3. Воронцов О.В. Визначення рекурентної залежності між членами числових послідовностей взятими із нерівномірним кроком. / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 68-73.

ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ОБЪЕКТОВ СТРОИТЕЛЬСТВА ОДНОМЕРНЫМИ ЧИСЛОВЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ШАГОМ

О.В. Воронцов

Показаны возможности использования одномерных числовых последовательностей с неравномерным шагом для дискретного геометрического моделирования криволинейных образов. Рассмотрено определение полинома ***n***-й степени произвольными дискретными значениями.

DISCRETE INTERPOLATION OF GEOMETRICAL CHARACTERS BUILDING OBJECTS BY UNIDIMENSIONAL NUMERICAL SEQUENCES WITH UNEVEN STEP

O. Vorontsov

Possibilities for using unidimensional numerical sequences have been shown with an uneven step for discrete geometrical design of curvilinear forms. Determination of n degree polynomial by means of discrete values has been considered.