УДК 514.18

О.В. Воронцов, к.т.н., доц.

ВИЗНАЧЕННЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГУ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇЇ СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ОДНОВИМІРНИХ ТОЧКОВИХ МНОЖИН

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Україна

В роботі досліджено питання визначення дискретних аналогів дробово-лінійних функцій із використанням геометричного апарату суперпозицій.

Постановка проблеми. Перспективними у прикладній геометрії є наукові дослідження задач, що дозволяють звести до мінімуму вихідну геометричну інформацію про об'єкти досліджень із забезпеченням необхідної точності і адекватності їх моделей, оперативного змінення ходу розрахунків модельованої поверхні без використання трудомістких операцій, оперативного переходу від дискретної інформації до неперервної і навпаки.

Аналіз останніх досліджень. У статті [1] проведено дослідження методики дискретного моделювання поліномів різних степенів із використанням геометричного апарату суперпозицій точкових множин, що дозволяє уникнути складання і розв'язання систем рівнянь. Виведено аналітичні вирази для визначення координат будь-яких точок числової послідовності n-го порядку як суперпозицій координат довільних точок даної послідовності.

Постановка завдання. Мета даної роботи полягає у проведенні досліджень методики визначення дискретних моделей дробово-лінійних функцій із використанням геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин.

Виклад основного змісту дослідження. Звільняючись від дискретного параметра i у числовій послідовності:

$$a_i = \frac{1}{i}$$

можна одержати рекурентні формули для суміжних вузлів [2]:

$$a_{i+1} = \frac{a_i}{1+a_i}\ ;\ a_{i+2} = \frac{a_i}{1+2a_i}\ ;\ a_{i+3} = \frac{a_i}{1+3a_i}\ ;\ ...;\ a_{i+p} = \frac{a_i}{1+pa_i}\ ;$$

$$a_{i+p_1} = \frac{a_i}{1+p_1a_i}\ ;\ a_{i+p_2} = \frac{a_i}{1+p_2a_i}\ ;\ a_{i+p_3} = \frac{a_i}{1+p_3a_i}\ ;\ \dots\ ;$$

$$a_{i+p_k} = \frac{a_i}{1+p_ka_i}\ ;\ \dots\ ;\ a_{i+p_n} = \frac{a_i}{1+p_na_i}\ ;\ a_{i+p_{n+1}} = \frac{a_i}{1+p_{n+1}a_i}\ ;$$

$$a_{i-1}=\frac{a_i}{1-a_i}\ ;\ a_{i-2}=\frac{a_i}{1-2a_i}\ ;\ a_{i-3}=\frac{a_i}{1-3a_i}\ ;\ ...;\ a_{i-p}=\frac{a_i}{1-pa_i}\ ;$$

$$a_{i-p_1}=\frac{a_i}{1-p_1a_i}\quad;\quad a_{i-p_2}=\frac{a_i}{1-p_2a_i}\quad;\quad a_{i-p_3}=\frac{a_i}{1-p_3a_i}\quad;\quad\ldots\quad;$$

$$a_{i-p_k}=\frac{a_i}{1-p_ka_i}\ ;\ \ldots\ ;\ a_{i-p_n}=\frac{a_i}{1-p_na_i}\ ;\ a_{i-p_{n+1}}=\frac{a_i}{1-p_{n+1}a_i}\ .$$

Згідно доведеної у роботі [1] властивості можемо припустити, що координати будь-якої точки числової послідовності $a_i=\frac{1}{i},\ (i\neq 0)$ можна визначити як суперпозиції координат початку системи координат та двох довільних точок даної послідовності:

$$\begin{cases} k_1 0+k_2 1+k_3 2=i \\ k_1 0+k_2 1+k_3 0{,}5=\frac{1}{i} \\ k_1+k_2+k_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=i-2k_3 \\ k_3=\frac{i}{1{,}5}-\frac{1}{1{,}5i} \\ k_1=1-k_2-k_3 \end{cases} \tag{1}$$

Наприклад показники суперпозиції для визначення третього члена даної послідовності мають значення:

$$\begin{cases} k_3 0+k_1 1+k_2 2=3 \\ k_3 0+k_1 1+k_2 0{,}5=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=3-2k_3 \\ k_2=\frac{3}{1{,}5}-\frac{1}{1{,}5\times 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=-0{,}556 \\ k_2=1{,}778 \\ k_3=-0{,}222 \end{cases}$$

Значення показників суперпозиції ***k_1, k_2 k_3*** початку системи координат та точок ***1, 2*** даної послідовності для визначення точок ***3—10*** наведені у таблиці **1**.

Таблиця 1

			3			6	7	8	9	0
i		,5	0 ,3333	,25	,2	0 ,1667	0 ,143	0 ,125	0 ,1111	,1
3			- 0,222	0,5	0,8	- 1,11	- 1,428	- 1,75	- 2,074	2.4
1			- 0.556	1	1,4	- 1,78	- 2,144	- 2,5	- 2,852	3,2
2			1 ,778	,5	,2	3 ,89	4 ,572	5 ,25	5 ,926	,6

Враховуючи нульові значення координат точки – початку системи координат у системі (**1**), для будь-якої точки ***M (i, a_i)*** послідовності $a_i = \frac{1}{i}$ показники k_1 та k_2 можна визначити як розв'язки системи (**2**):

$$\begin{cases} k_1(i+p_1)+k_2(i+p_2)=i+p \\ k_1\frac{1}{i+p_1}+k_2\frac{1}{i+p_2}=\frac{1}{i+p} \end{cases}, \qquad (2)$$

$$(i \neq -p;\ i \neq -p_1;\ i \neq -p_2);$$

А значення координат довільної точки – за формулою:

$$a_{i+p} = k_1 a_{i+p_1} + k_2 a_{i+p_2}.$$

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} i+p & i+p_2 \\ \frac{1}{i+p} & \frac{1}{i+p_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i+p_1 & i+p_2 \\ \frac{1}{i+p_1} & \frac{1}{i+p_2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{i+p}{i+p_2} - \frac{i+p_2}{i+p}}{\frac{i+p_1}{i+p_2} - \frac{i+p_2}{i+p_1}} = \qquad (3)$$

$$= \frac{(i+p)^2-(i+p_2)^2}{(i+p_2)(i+p_1)} : \frac{(i+p_1)^2-(i+p_2)^2}{(i+p_2)(i+p_1)} = \frac{(i+p)^2-(i+p_2)^2}{(i+p_1)^2-(i+p_2)^2} \times \frac{i+p_1}{i+p_2}$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} i+p_1 & i+p \\ \frac{1}{i+p_1} & \frac{1}{i+p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i+p_1 & i+p_2 \\ \frac{1}{i+p_1} & \frac{1}{i+p_2} \end{vmatrix}} = \left(\frac{i+p_1}{i+p} - \frac{i+p}{i+p_1} \right) : \left(\frac{i+p_1}{i+p_2} - \frac{i+p_2}{i+p_1} \right) =$$

$$= \frac{(i+p_1)^2-(i+p)^2}{(i+p_1)^2-(i+p_2)^2} \times \frac{i+p_2}{i+p} \qquad (4)$$

$$a_{i+p}=\frac{(i+p)^2-(i+p_2)^2}{(i+p_1)^2-(i+p_2)^2}\times\frac{i+p_1}{i+p_2}a_{i+p_1}+$$

$$+\frac{(i+p_1)^2-(i+p)^2}{(i+p_1)^2-(i+p_2)^2}\times\frac{i+p_2}{i+p}a_{i+p_2}$$

Розглянемо конкретний приклад. Дано послідовність $a_i=\frac{1}{i},\ (i\neq 0)$.

Виберем $i=0,\ p=3,\ p_1=4,\ p_2=1,$ тоді:

$$a_{i+p}=a_3=\frac{1}{3}\ ,\ \ a_{i+p_1}=a_4=\frac{1}{4}\ ,\ \ a_{i+p_2}=a_1=1\ .$$

Знайдемо такі показники k_1 та k_2, щоб виконувалися рівності:

$$\begin{cases}4k_1+k_2=3\\ k_1a_4+k_2a_1=\frac{1}{3}\end{cases},$$

За формулами (**3**) та (**4**) маємо:

$$k_1=\frac{3^2-1^2}{4^2-1^2}\times\frac{4}{3}=\frac{32}{45}\ ,\quad k_2=\frac{4^2-3^2}{4^2-1^2}\times\frac{4}{3}=\frac{7}{45}\ .$$

Далі:

$$a_3=\frac{32}{45}a_4+\frac{7}{45}a_1\ . \qquad (5)$$

Виконаємо перевірку підставивши у (**5**) значення для $a_1,\ a_3,\ a_4$:

$$\frac{1}{3}=\frac{32}{45}\times\frac{1}{4}+\frac{7}{45}\times 1=\frac{1}{3}\ .$$

Отримали тотожність, отже завдання вирішене правильно.

Висновки. У даній роботі одержано аналітичний вираз для визначення дискретного аналогу дробово-лінійної функції із використанням геометричного апарату суперпозицій одновимірних точкових множин. Результати досліджень можуть бути використані для дискретного моделювання геометричних образів числовими послідовностями дробово-лінійних функцій.

Література

1. Воронцов, О.В. Визначення дискретного аналогу полінома n-го степеня суперпозиціями точок числової послідовності n-го порядку / О.В. Воронцов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 63-67.

2. Воронцов, О.В., Радченко, Г.О. Рекурентні аналоги класів елементарних функцій / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 83. – С. 136-139.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ОДНОМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

О.В. Воронцов

В работе исследован вопрос определения дискретных аналогов дробно-линейных функций с использованием геометрического аппарата суперпозиций.

DETERMINATION OF DISCRETE ANALOGUE OF LINEAR-FRACTIONAL FUNCTION WITH SUPERPOSITIONS OF UNIDIMENSIONAL POINT SETS.

O. Vorontsov

The problem of determination of discrete analogues of linear-fractional functions with the use of geometrical superposition apparatus has been studied.