УДК 514.18 **Е.А. Гавриленко**, к.т.н.
А.В. Найдыш, д.т.н.

ВАРИАТИВНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УГЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОЙ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГЛАДКОСТИ

Таврический государственный агротехнологический университет, Украина

В работе предложена схема сгущения точечного ряда, позволяющая формировать на основе пространственных угловых параметров дискретно представленную кривую второго порядка гладкости. В процессе моделирования используются дискретные аналоги радиуса кривизны и кручения.

Постановка проблемы. Пространственные одномерные обводы используются в качестве элементов определителя дискретно представленной поверхности. Пространственными являются осевые линии поверхностей, транспортирующих среду, линии стыковки отсеков составных поверхностей, траектории обтекания поверхности средой.

При моделировании поверхностей с повышенными аэро- и гидродинамическими свойствами необходимо обеспечить контроль направления хода кривой, динамику изменения кривизны и кручения, наличие или отсутствие особых точек, второй порядок гладкости обвода [4]. Повышенные динамические качества необходимы поверхностям, ограничивающим корпусные изделия авиа-, автомобиле-, судостроения, лопатки турбин и смесителей, каналы двигателей внутреннего сгорания, трубопроводы, рабочие органы сельскохозяйственных машин.

Для эффективного моделирования поверхностей с повышенными динамическими свойствами необходимы методы, обеспечивающие заданную точность и гибкость формирования геометрических характеристик обводов, допускающие локальность решения и его корректировки, обеспечивающие отсутствие осцилляции. Известные методы непрерывного и дискретного геометрического моделирования не отвечают, в полной мере, указанным требованиям. Их возможности по обеспечению необходимой закономерности изменения характеристик вдоль обвода часто не достаточны или принципиально невозможны.

Задача может решаться на основе методов вариативного дискретного геометрического моделирования (ВДГМ). Основным свойством методов ВДГМ является выбор решения внутри некоторого диапазона возможных, по условиям задачи, значений. Наличие диапазона решений даёт возможность локального моделирования и локальной коррекции решения, позволяет учесть, таким образом, дополнительные (особые) условия задачи, а ограниченность диапазона решений позволяет контролировать отсутствие осцилляции и обеспечивать необходимые требования гладкости обвода и его характеристик. Вычислительной особенностью методов является многократное повторение расчётных алгоритмов (последовательное сгущение), приводящее к замене, с заданной степенью точности, исходного геометрического образа сопровождающей ломаной линией. В качестве известных дифференциально-геометрических характеристик используются их дискретные аналоги [3].

Анализ последних исследований и публикаций. Из методов НГМ отметим методы, обеспечивающие второй порядок гладкости обвода. Это моделирование обвода на основе В-сплайна [5] и моделирование обвода формированием его проекций на координатных плоскостях [2]. Оба направления предполагают аналитическое представление участков, составляющих обвод. Характеристики кривой контролируются в исходных точках – точках стыковки участков. Возможность влиять на форму и характеристики обвода внутри участков ограничивается выбором определяющих их кривых и характеристиками в узловых точках.

Из известных направлений ДГМ наиболее широкие возможности корректировки получаемого решения дает вариативное дискретное геометрическое моделирование, предполагающее формирование обвода в виде сколь угодно большого количества точек, получаемых в результате последовательных сгущений исходного точечного ряда [3]. Данная статья продолжает разработку метода вариативного моделирования на основе пространственных угловых параметров гладкой дискретно представленной кривой (ДПК), начатую в статье [1].

Алгоритм, предложенный в [1], предполагает формирование ДПК первого порядка гладкости по участкам с постоянным направлением кручения. В исходных точках определяются диапазоны возможного расположения элементов основных трехгранников, и назначается их конкретное положение. Основные трёхгранники определяют область возможного расположения точек сгущения. Это тетраэдр, грани которого определяют соприкасающиеся ($СП_i, СП_{i+1}$) и касательные ($КП'_i, 'КП_{i+1}$) плоскости, назначенные в исходных точках (рис. 1).

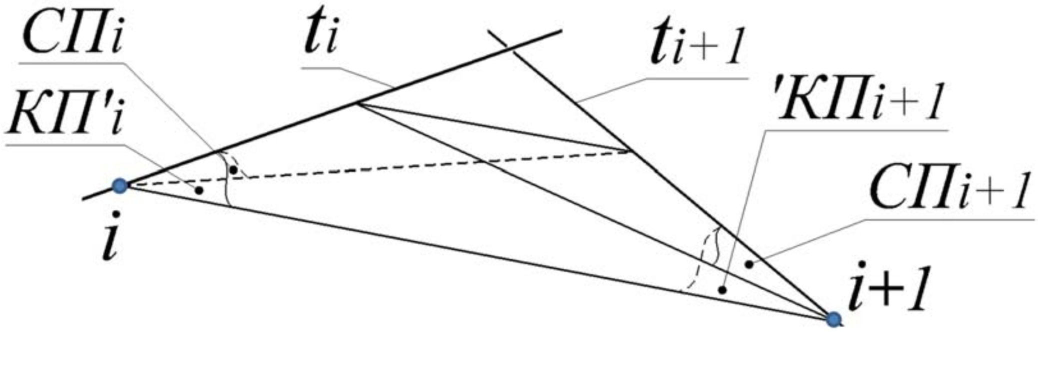

Рис. 1. Тетраэдр расположения точки сгущения

Положение основных трёхгранников, назначаемых в точках сгущения, является параметром управления формой кривой, наравне с положением трёхгранников, назначенных в исходных точках. Алгоритм позволяет определять область возможного расположения точек сгущения и обеспечивает, в рамках этой области, любую степень локальности корректировки получаемого решения. При этом гарантируется первый порядок гладкости обвода и отсутствие осцилляции. Достижение второго порядка гладкости обводов, формируемых на основе алгоритма [1] обеспечит повышение динамических качеств моделируемых поверхностей.

Методы ДГМ, обеспечивающие второй порядок гладкости одномерных пространственных обводов, нам неизвестны.

Формулировка целей и задач статьи. Разработать схему сгущения ДПК, обеспечивающую второй порядок гладкости обвода формируемого по алгоритму, предложенному в [1].

Основная часть. Пространственная ДПК формируется сгущением исходного точечного ряда. Геометрические характеристики кривой, представленной дискретно, однозначно не определены. В процессе моделирования, значения кривизны и кручения в точках ДПК будем контролировать с помощью их дискретных аналогов. Значение радиуса кривизны в i-ой точке (R_i) будем оценивать радиусом касательной окружности (KO_i), определяемой точкой i, касательной прямой в i-ой точке (t_i) и ближайшей точкой ДПК. В первом приближении это R_i^{i-1} и R_i^{i+1} – радиусы KO_i^{i-1} и KO_i^{i+1}, проходящих через точки $i-1$ и $i+1$ соответственно (рис. 2).

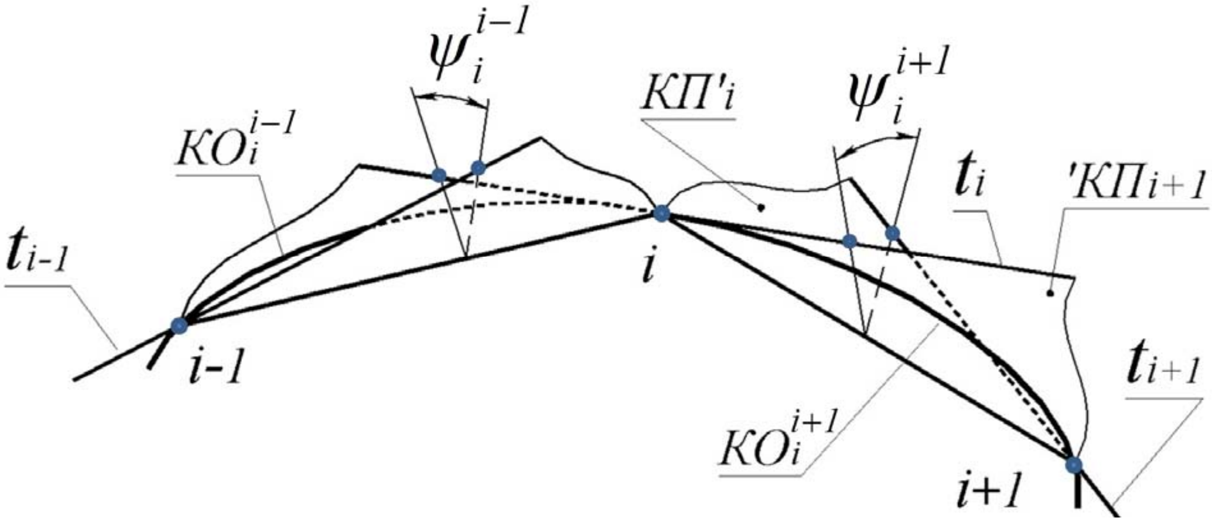

Рис. 2. Определение дискретных аналогов кривизны и кручения ДПК

После сгущения точечного ряда расстояния от точки i до ближайших точек уменьшаются. Для достижения второго порядка гладкости обвода необходимо, чтобы радиусы предыдущей и последующей KO_i стремились к одному значению $-R_i$.

Значение кручения в i-ой точке (σ_i) будем оценивать отношением двугранного угла между касательными плоскостями, определяемыми точкой i, ближайшей точкой ДПК и касательными прямыми в этих точках, к длине дуги соответствующей KO_i. В первом приближении это:

$$\sigma_i^{i-1} = \frac{\psi_i^{i-1}}{l_i^{i-1}} \quad \text{и} \quad \sigma_i^{i+1} = \frac{\psi_i^{i+1}}{l_i^{i+1}}, \quad \text{где (см. рис. 2)}$$

ψ_i^{i-1} – величина угла между плоскостями, определяемыми $i-1$, t_{i-1} и i, t_i; ψ_i^{i+1} – величина угла между плоскостями, определяемыми i, t_i и $i+1$, t_{i+1}; l_i^{i-1} – длина дуги *(i-1,i)* KO_i^{i-1};
l_i^{i+1} – длина дуги *(i,i+1)* KO_i^{i+1}.

Для достижения второго порядка гладкости обвода необходимо, чтобы величины $\sigma_i^{сг}$, определяемые ближайшими к точке i предыдущей и последующей точками сгущения ($'i_{сг}$ и $i'_{сг}$) и положением касательных в них, стремились к одному значению – σ_i.

Выполнение условий формирования значений R_i и σ_i ограничивает область возможного расположения точки сгущения и диапазоны возможных значений соответствующих ей характеристик ДПК.

При формировании ДПК первого порядка гладкости [1] диапазон расположения точки $i_{сг}$ на участке $i \ldots i+1$ определяется в результате назначения положения касательных плоскостей $КП_i^{сг}$ и $КП_{i+1}^{сг}$ (рис. 3).

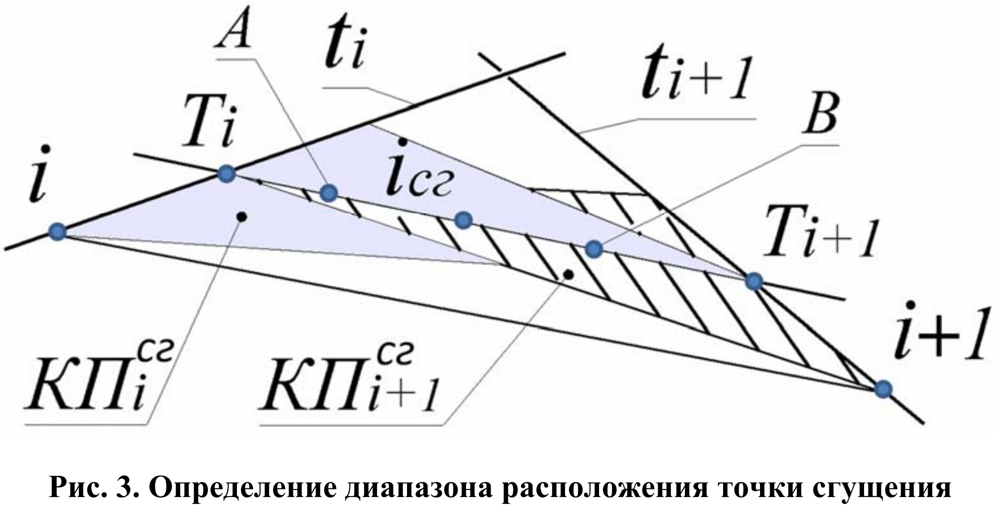

Рис. 3. Определение диапазона расположения точки сгущения

Эти плоскости, определяемые касательными t_i, t_{i+1} и точкой $i_{сг}$, располагаются внутри двугранных углов, ограниченных соприкасающимися и касательными плоскостями – $СП_i$ и $КП'_i$, $СП_{i+1}$ и $'КП_{i+1}$ (см. рис. 1). Назначение точки $i_{сг}$ на отрезке $\left[T_i;T_{i+1}\right]$, принадлежащем прямой пересечения $КП_i^{сг}$ и $КП_{i+1}^{сг}$ обеспечивает первый порядок гладкости ДПК.

Внутри отрезка $\left[T_i;T_{i+1}\right]$ определяется уточнённый диапазон $\left[A;B\right]$. Положение точек A и B определяется из условий: $R_i^{сг}=R_i^{i+1}$ и $R_{i+1}^{сг}=R_{i+1}^{i}$. Определение точки $i_{сг}$ внутри $\left[A;B\right]$ обеспечивает возрастание или убывание радиусов касательных окружностей на участке.

Касательная прямая в точке сгущения ($t_{сг}$) назначается таким образом, чтобы положение определяемых ею и точками i, $i+1$ касательных плоскостей обеспечивало назначенную динамику изменения $\sigma_i^{сг}$ и $\sigma_{i+1}^{сг}$. После определения $t_{сг}$, положение основного трёхгранника в точке сгущения определяется согласно [1].

При последующем формировании ДПК точка $i_{сг}$ рассматривается как исходная, а назначенные в ней характеристики являются параметрами, определяющими область расположения точек последующих сгущений.

В результате последовательных сгущений расстояние между смежными точками ДПК стремится к бесконечно малой величине. При этом условия формирования R_i и σ_i обеспечивают:

- положение касательных плоскостей приближается к положению соприкасающихся плоскостей;

- значения углов ψ_i между касательными плоскостями приближается к значению углов кручения;

- радиусы предыдущей ($'R_i$) и последующей (R'_i) касательных окружностей стремятся к значению радиуса кривизны: $'R_i \approx R_i \approx R'_i$;

- величины $\sigma_i^{сг}$, соответствующие участку $'i_{сг}...i$ ($'\sigma_i$) и $i...i'_{сг}$ (σ'_i) стремятся к значению кручения: $'\sigma_i \approx \sigma_i \approx \sigma'_i$.

Значения кривизны и кручения в i-ой точке будем считать сформированными, когда величины $\Delta R_i=\left|'R_i-R'_i\right|$ и $\Delta\sigma_i=\left|'\sigma_i-\sigma'_i\right|$ не превышают заданной погрешности их определения.

Выводы. Предложенная схема сгущения дискретно представленной кривой (ДПК) позволяет формировать в ее узлах значения радиуса кривизны и кручения. Радиус кривизны формируется как предельное значение радиуса касательной окружности, определяемой касательной прямой в рассматриваемой точке и ближайшей точкой сгущения. Значение кручения формируется как отношение величины угла между касательными плоскостями в рассматриваемой точке и ближайшей точке ДПК к длине дуги соответствующей касательной окружности.

Достижение поставленной в статье цели – обеспечение второго порядка гладкости обвода, является очередным этапом в разработке метода моделирования ДПК на основе пространственных угловых параметров. Задачей дальнейших исследований является обеспечение закономерного изменения кривизны и кручения вдоль кривой.

Решение поставленных задач позволит моделировать, на основе разрабатываемого метода, динамические поверхности сложной формы, обеспечивающие заданные характеристики потоков, возникающих при взаимодействии поверхности со средой.

Литература

1. *Гавриленко Е.А.* Дискретне моделювання одновимірних просторових обводів першого порядку гладкості / Е.А. Гавриленко // Прикл. геом. та інж. графіка / Праці ТДАТУ – Вип.4, Т.56. – Мелітополь 2012. – с. 28-32.

2. *Котов И.И.* Графо - аналитические методы построения обводов. / И.И. Котов // Труды Института дружбы народов им. П. Лумумбы, 1963, т. 2, вып. 1., с. 37–46.

3. *Найдиш В.М.* Дискретна інтерполяція / В.М. Найдиш – Мелітополь 2008. – 250 с.

4. *Осипов В.А.* Машинные методы проектирования непрерывно - каркасных поверхностей. / В.А. Осипов – М. Машиностроение, 1979. – 248 с.

5. *Херн Д.* Компьютерная графика и стандарт Open GL. / Д. Херн, М.П. Бейкер – С-Пб.: Вильямс, 2005. – 1159 с.

ВАРІАТИВНЕ ДИСКРЕТНЕ ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ ПРОСТОРОВИХ КУТОВИХ ПАРАМЕТРІВ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ГЛАДКОСТІ

Є.А. Гавриленко, А.В. Найдиш

У роботі запропонована схема згущення точкового ряду, яка дозволяє формувати на основі просторових кутових параметрів дискретно представлену криву другого порядку гладкості. У процесі моделювання використовуються дискретні аналоги радіуса кривини та скруту.

VARIATIVE DISCRETE GEOMETRIC MODELING BASED ON SPATIAL ANGULAR PARAMETERS OF THE DISCRETELY REPRESENTED CURVE WITH THE SECOND ORDER OF SMOOTHNESS

E. Gavrilenko, A. Naydysh

The scheme of thickening of the points set which allows to forming a discretely represented curve with the second order of smoothness on the basis of the spatial angular parameters is proposed in this article. The discrete analogs of radius of curvature and torsion are used in the modeling.