УДК 514.182.7 **А.В.Золотова**

ЗГУЩЕННЯ ДИСКРЕТНОГО КАРКАСУ ПОВЕРХНІ

Київський національний університет будівництва та архітектури

В статті запропоновано метод згущення дискретного каркасу поверхні шляхом заповнення окремих порцій (комірок) поверхнями Кунса у дискретному вигляді із забезпеченням першого порядку гладкості стикування. Досліджена залежність величини навантаження від кроку сітки при рівномірно розподіленому формоутворюючому навантаженні.

Постановка проблеми. В задачах геометричного моделювання поверхонь статико-геометричним способом потрібно розв'язати систему лінійних рівнянь, щоб отримати координати усіх внутрішніх вузлів поверхні за заданими крайовими умовами. Але якщо кількість рівнянь досить велика (декілька десятків), то процес розв'язання займає багато часу, тому зручно формувати поверхню в декілька етапів. Спочатку розрахувати координати вузлів поверхні з невеликою кількістю клітин, а потім згущувати каркас. З цього виникає проблема заповнення порцій сітки поверхнею, що гладко стикується з прилягаючими порціями дискретно визначеної поверхні.

Аналіз останніх досліджень. За останні роки було опубліковано ряд робіт вітчизняних вчених по згущенню дискретно представлених кривих та поверхонь [2], [3], [4], [5]. Це роботи [1],[2] по згущенню плоских і просторових кривих. В роботі [4] по згущенню дискретних поверхонь двовимірна інтерполяція зводилась до одновимірної. В роботі [5] запропоновано алгоритм локального згущення сітки з трикутними комірками та представлених квадродеревом з використанням апарату числових послідовностей. Дослідження по згущенню сітки з чотирикутними комірками на основі двовимірної дискретної інтерполяції відсутні, але для вдосконалення процесу геометричного моделювання складених гладких поверхонь ця задача є актуальною.

Основна частина. Щоб сформувати дискретний каркас поверхні статико-геометричним способом за заданими граничними умовами, необхідно скласти рівняння рівноваги для кожного внутрішнього вузла. Заданими граничними умовами можуть бути: координати вузлів опорного контуру, дотичні площини, координати окремих внутрішніх вузлів, величина зовнішнього формоутворюючого навантаження, закон розподілу формоутворюючого навантаження. Для заповнення окремих порцій поверхні можна використовувати поверхню Кунса у дискретному вигляді. Поверхня Кунса розглядається як сума двох циліндроїдів і гіперболічного параболоїда [6]. Щоб визначити аплікати внутрішніх вузлів порції поверхні, сформованої статико-геометричним способом, розглянемо порцію дискретного каркаса поверхні ABCD (Рис.4), в межах одного кроку сітки h. Визначимо поверхню, що проходить через точки A, B, C, D, яка обмежена кривими AB, DC і прямими AD і BC. Це поверхня циліндроїда I (Рис.1) Прив'яжемо циліндроїд до локальної системи координат таким чином, що координати точок дорівнюють $A(0,0,z_A)$, $B(h,0,z_B)$, $C(h,h,z_C)$, $D(0,h,z_D)$, $E(-h,0,z_E)$, $F(2h,0,z_F)$, $G(-h,h,z_G)$, $H(2h,h,z_H)$.

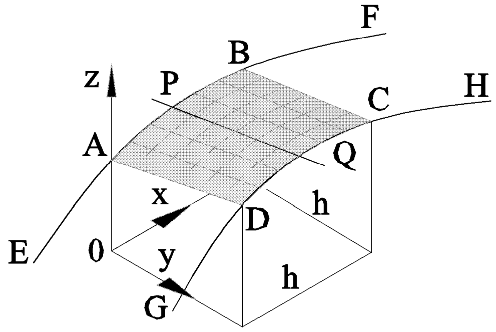

Рис.1

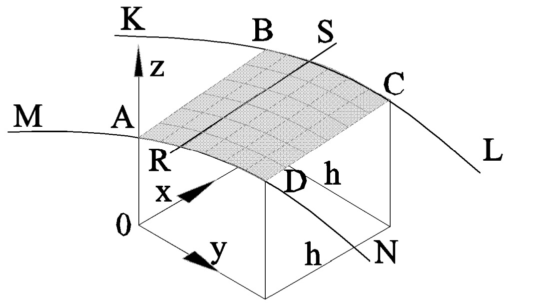

Рис.2

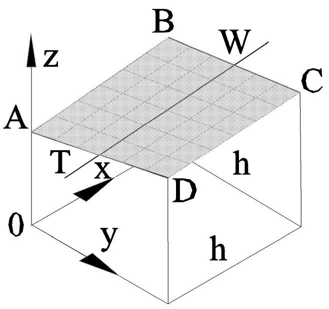

Рис.3

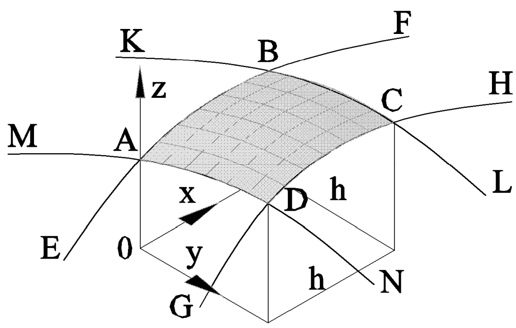

Рис.4

Рівняння циліндроїда I отримуємо як рівняння довільної твірної PQ, що перетинає криві AB і DC. Визначимо рівняння кривої, що проходить через точки AB і гладко стикується з кривими EA і BF, тобто має спільні дотичні в т. A і B. Рівняння кривої AB в дискретному вигляді:

$$z_{AB} = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3, \qquad (1)$$

де i-номер вузла у напрямку x.

Рівняння дотичної в т. A знайдемо як рівняння прямої, що проходить через т.A і паралельна хорді EB. Загальне рівняння дотичної:

$z = kx + b$, де k- кутовий коефіцієнт, b- вільний член.

$$k = z'_A = tg\alpha_A = \frac{z_B - z_E}{2h}, \qquad (2)$$

де z_B,z_E – аплікати т.B,E; h- крок сітки. :

З іншого боку, кутовий коефіцієнт дотичної до кривої (1) визначається як перша похідна функції (1):

$$k = a_1 + 2a_2 i + 3a_3 i^2. \qquad (3)$$

Зазначені геометричні умови, що зв'язують параметри кривої (1), записуємо у вигляді системи рівнянь:

$$z_A = a_0$$

$$z_B = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 \qquad (4)$$
$$\frac{z_B - z_E}{2h} = a_1$$
$$\frac{z_F - z_A}{2h} = a_1 + 2a_2 i + 3a_3 i^2$$

Розв'язання системи (4) дає значення коефіцієнтів: $a_0 = z_A$, $a_1 = \frac{z_B - z_E}{2h}$, $a_2 = \frac{2z_E - 5z_A + 4z_B - 4z_F}{2h^2}$, $a_3 = \frac{3z_A - 3z_B - z_E + z_F}{2h^3}$.

Відповідно рівняння кривої AB має вигляд:

$$z_{AB} = z_A + \frac{z_B - z_E}{2h} i + \frac{2z_E - 5z_A + 4z_B - z_F}{2h^2} i^2 + \frac{3z_A - 3z_B - z_E + z_F}{2h^3} i^3.$$

(5)

Рівняння кривої, що проходить через точки C і D і гладко стикується з кривими GC і DH отримуємо аналогічно:

$$z_{CD} = z_D + \frac{z_C - z_G}{2h} i + \frac{2z_G - 5z_D + 4z_C - z_H}{2h^2} i^2 + \frac{3z_D - 3z_C - z_G + z_H}{2h^3} i^3.$$

(6) Рівняння твірної PQ:

$$\frac{y - y_P}{h} = \frac{z - z_P}{z_Q - z_P}. \qquad (7)$$

У нашому випадку $y_P = 0$, тоді $z = z_P + \frac{z_P - z_Q}{h} y$.

(8)

В дискретному вигляді: $z = z_P + \frac{z_P - z_Q}{h} j$, де j-номер вузла у напрямку y.

Оскільки точки P і Q належать кривим AB і CD, то замість аплікат z_P і z_Q в (8) підставимо рівняння (5) і (6). Отримаємо рівняння циліндроїда I:

$$z=z_A+\frac{z_B-z_E}{2h}i+\frac{2z_E-5z_A+4z_B-z_F}{2h^2}i^2+\frac{3z_A-3z_B-z_E+z_F}{2h^3}i^3+[\frac{z_B-z_A}{h}+$$
$$(\frac{z_C-z_G-z_B+z_E}{2h^2})i+(\frac{2z_G-5z_D+4z_C-z_H-2z_E+5z_A-4z_B+z_F}{2h^3})i^2$$
$$+(\frac{3z_D-3z_C-z_G+z_H-3z_A+3z_B+z_E-z_F}{2h^4})i^3]j$$

(9) Рівняння циліндроїда, обмеженого кривими BC і AD і відрізками прямих AB і DC (Рис.2) отримано аналогічно:

$$z_{II}=z_A+\frac{z_D-z_M}{2h}j+\frac{2z_M-5z_A+4z_D-z_N}{2h^2}j^2+\frac{3z_A-3z_D-z_M+z_N}{2h^3}j^3+[\frac{z_B-z_A}{h}+$$
$$(\frac{z_D-z_M-z_N+z_K}{2h^2})j+(\frac{2z_M-5z_A+4z_D-z_N-2z_K+5z_B-4z_C+z_L}{2h^3})j^2$$
$$+(\frac{3z_A-3z_D-z_M+z_N-3z_B+3z_C+z_K-z_L}{2h^4})j^3]i$$

(10)

Визначимо рівняння гіперболічного параболоїда, що проходить через точки ABCD як рівняння твірної TW, що перетинає відрізки BC і AD (Рис.3).

Рівняння прямих BC і AD відповідно:

$$z_{BC}=z_B+\frac{z_C-z_B}{h}j \quad (11), \qquad z_{AD}=z_A+\frac{z_D-z_A}{h}j \quad (12).$$

Рівняння кривої TW, що перетинає відрізки BC і AD:

$$z_{TW}=z_T+\frac{z_W-z_T}{h}i. \qquad (13)$$

Замість z_T і z_W у рівняння (13) підставимо (11) і (12), отримаємо рівняння гіперболічного параболоїда:

$$z_{ABCD}=z_A+\frac{z_D-z_A}{h}j+\frac{(z_B+\frac{z_C-z_B}{h}j)-(z_A+\frac{z_D-z_A}{h}j)}{h}i.$$

(14)

Аплікати поверхні ABCD з будь – яким кроком отримуємо як результат функціонального додавання поверхонь (9) і (10) і віднімання (14). Якщо ми загущуємо поверхню, дискретний каркас якої відповідає рівномірному зовнішньому навантаженню, то отримуємо дискретний каркас поверхні, який також відповідає рівномірному розподілу формоутворюючого навантаження, але величина навантаження на кожний вузол буде іншою.

Це можна довести, якщо розглянути порцію поверхні еліптичного параболоїда, що сформована під дією рівномірно розподіленого навантаження (Рис.5).

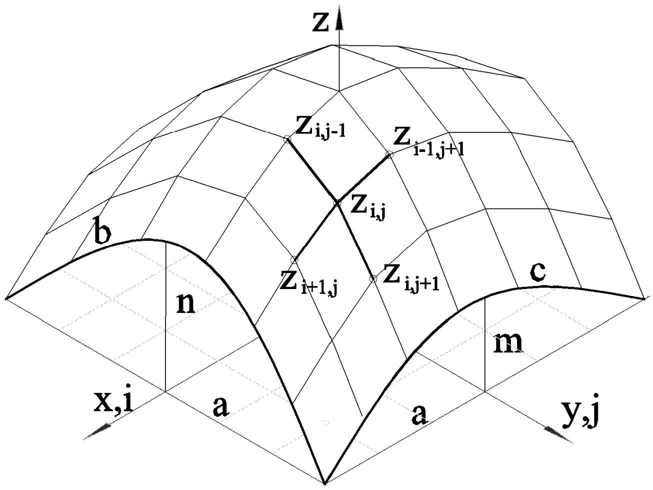

Рис.5

Парабола b: $$z = n - \frac{ny^2}{a^2}, \qquad (15)$$

c: $$z = m - \frac{mx^2}{a^2}. \qquad (16)$$

Рівняння параболоїда:

$$z = m + n - \frac{mx^2 + ny^2}{a^2} \qquad (17)$$

Координати вузлів $z_{i,j}$, $z_{i-1,j}$, $z_{i+1,j}$, $z_{i,j-1}$, $z_{i,j+1}$ визначимо з рівняння (17). З рівняння рівноваги :

$$P_{i,j} = 4z_{i,j} - z_{i-1,j} - z_{i+1,j} - z_{i,j-1} - z_{i,j+1} \qquad (18)$$

знайдемо навантаження на вузол P_{ij}

$$P_{i,j} = \frac{2h^2(m+n)}{a^2}. \qquad (19)$$

Величина навантаження змінюється пропорційно квадрату кроку сітки (площі чарунки в плані).

Висновки. При загущенні дискретного каркасу поверхні комірки сітки можна заповнювати поверхнями Кунса в дискретному вигляді. Характер навантаження при цьому не змінюється, але величина навантаження змінюється пропорційно величині кроку сітки у квадраті.

Література

1. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Диссертация на соискание степени доктора технических наук. 05.01.01/ М: МАИ, 1986.-348с.

2. *Найдиш А.В., Спірінцев Д.В.* Згущення просторових ДПК на основі їх параметричного подання//Геометричне та комп'ютерне моделювання/ ХДУХТ. - Харків, 2009. – Вип.23.- С. 66-71.

3. *Лебедев В.О.* Дискретна інтерполяція плоских дискретно представлених кривих ліній на основі кутів загущення. автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня к. т. н., Мелітополь, 2004.

4. *Верещага В.М., Найдиш А.В., Бездітний А. О., Кучеренко В.В.* Побудова поверхонь Найдиша методом плавного перетікання на основі послідовних одновимірних згущень. Праці ТДАТУ вип.4, т.50, С.48-50.

5. *Ройко О.Ю.* Гаусова кривина дискретно заданих поверхонь як критерій для загущення сітки. Міжвузівський збірник «Комп'ютерно-інтегровані технології, освіта, наука, виробництво»,- Луцьк, 2011, С.207-210.

6. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве - М.: Мир, 1982. - 304с.

СГУЩЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО КАРКАСА ПОВЕРХНОСТИ

А.В.Золотова

В статье предложен метод сгущения дискретного каркаса поверхности путем заполнения отдельных порций (ячеек) поверхностями Кунса в дискретном виде с обеспечением первого порядка гладкости стыковки. Исследована зависимость величины нагрузки от шага сетки при равномерно распределенной формообразующей нагрузке.

THICKENING OF DISCRETE STRUCTURE SURFACE

A.Zolotova

A method for the condensation of a discrete frame of surface by the way of filling separate portions (cells) by Coons surfaces in discrete form with ensuring the first order of the smooth joining. The load value dependence of the grid step was explored under the conditions of forming a uniformly distributed load.