УДК 514.18 **Є.В. Конопацький***, к.т.н., доц.,
В.М. Верещага, д.т.н., проф.

ТЕОРЕМА СИНУСІВ У БАГАТОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Мелітопольська школа прикладної геометрії
**Донбаська національна академія будівництва і архітектури, Україна*

В статті запропоновано новий підхід, який узагальнює теорему синусів і дозволяє її представити не тільки у двовимірному просторі, а й у просторах більш високих розмірностей.

Постановка проблеми. В геометрії важливу роль відіграє теорема синусів, яка встановлює відповідність між кутами і довжинами сторін трикутника. У попередніх дослідженнях [1, 2] ця теорема розглянута в іншому ракурсі, який надає їй нового сенсу, в результаті чого вона стає ще більш вагомішою для практичного застосування. У загально прийнятому розумінні теорема синусів сформульована лише для трикутника, який розглядається на площині, тобто у двовимірному просторі, що, на думку авторів, значно звужує можливості її практичного застосування. Тому в цій статті робиться спроба узагальнення теореми синусів і представлення її, не тільки у двовимірному просторі, а й у просторах більш високих розмірностей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [3] розглянуто теорему синусів у тривимірному просторі, що є теоретичною базою для подальших досліджень, які проведені у цій статті. Узагальнення теореми синусів у багатопараметричному просторі розглядається вперше.

Основна частина. В рамках афінної геометрії, просте відношення трьох точок є інваріантом паралельного проеціювання. Представимо відрізок AB, з точкою C (рис. 1), що його поділяє, як трикутник ACB, в якому кут зламу $\angle ACB = \pi$. Якщо кут зламу C трикутника ACB рівний $\angle ACB = \pi n$, де n – будь-яке натуральне число, то дістанемо окремий випадок, відомий у геометрії, як просте відношення трьох точок прямої. При $\angle ACB \neq \pi n$, дістанемо узагальнення простого відношення трьох точок, для якого загальний відрізок AB поділяється точкою зламу C (рис. 2) на два відрізки AC і CB, які не належать одній прямій.

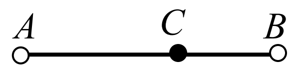

Рис. 1. Просте відношення трьох точок прямої

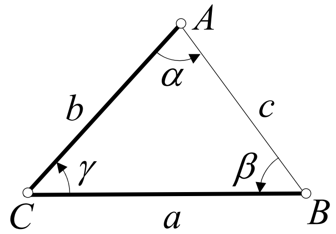

Рис. 2. Трикутник ACB з кутом зламу $\angle ACB \neq n\pi$

Відомо, що теорема синусів для будь-якого трикутника має наступний вигляд:

*Науковий консультант: д.т.н., проф. Верещага В.М.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \tag{1}$$

де R - радіус кола, описаного навколо трикутника ACB.

Нехай a', b', c' – проекції сторін, а α', β', γ' – проекції кутів, які утворилися у результаті паралельного проеціювання вихідного трикутника на довільну площину, то відношення $\frac{a'}{\sin\alpha'} = \frac{b'}{\sin\beta'} = \frac{c'}{\sin\gamma'} = 2R$ зберігається незмінним. Отже, як було доведено у роботі [1], теорема синусів є інваріантом паралельного проеціювання.

За аналогією із простим відношенням трьох точок, які належать прямій, введемо відношення для трьох точок, які утворюють трикутник. Для цього перетворимо вираз (1) для трикутника ACB з кутом зламу γ в точці C:

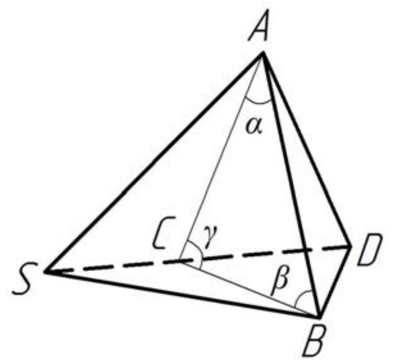

Рис. 3. Піраміда $ABDE$ з кутом зламу $\angle ACB \neq n\pi$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} = BAC, \tag{2}$$

де $BAC = \frac{BC}{CA}$ – просте відношення трьох точок, що утворюють трикутник ACB.

Переходимо у тривимірний простір. За аналогією з попередніми дослідженнями, представимо піраміду і розглянемо грані ASD і BDS з ребром SD, на якому знаходиться точка C і кутом зламу $\angle ACB = \gamma$ між площинами (рис. 3). Якщо кут зламу $\angle ACB = \pi n$, то точки A, B, D і S належать одній площині. А якщо кут зламу $\angle ACB \neq \pi n$, то дістанемо більш загальний випадок точки A, B, D і S належать тривимірному простору і утворюють дві окремі площини ASD і BDS.

Відповідно до точкового числення Балюби-Найдиша (БН-числення) [4-6], в межах якого проводяться дослідження, можна припустити, що відношенню площ трикутників ASD і BDS відповідає відношення відрізків AC і CB. Доведемо, що це твердження справедливе спочатку для плоского випадку, а потім для просторового.

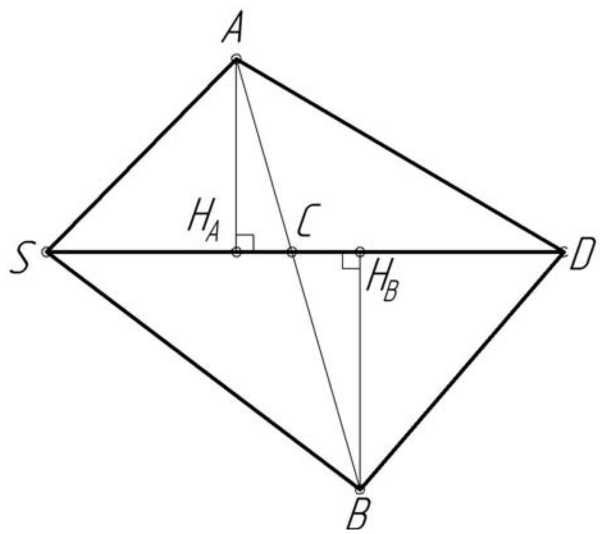

Рис. 4. Відповідність площ і довжин сторін трикутників на площині

Нехай у симплексі ABD задана точка S (рис. 4). Потрібно довести, що відношення площ трикутників SBD і SDA пропорційне до відношення відрізків BC і CA.

Із точок A і B будуємо два перпендикуляри AH_A і BH_B до прямої SD. Визначаємо площу трикутників SBD і SDA.

$$S_{SBD} = \frac{1}{2} SD \cdot BH_B;$$
$$S_{SDA} = \frac{1}{2} SD \cdot AH_A. \tag{3}$$

Тоді відношення площ трикутників SBD і SDA дорівнюватиме:

$$\frac{S_{SBD}}{S_{SDA}} = \frac{BH_B}{AH_A}. \tag{4}$$

Далі розглянемо трикутники BH_BC і AH_AC. Ці трикутники – подібні відповідно до першої ознаки подібності. Отже їх відповідні сторони пропорційні. Тоді, маємо:

$$\frac{BH_B}{AH_A} = \frac{BC}{CA} \Rightarrow \frac{S_{SBD}}{S_{SDA}} = \frac{BC}{CA} = BAC. \tag{5}$$

Що і потрібно було довести.

Враховуючи все вищесказане, сформулюємо наступне твердження.

Твердження. Відношення площ двох трикутників, у яких одна сторона є спільною, а дві протилежні вершини сполучені прямою, дорівнює простому відношенню трьох точок, якими є дві вихідні вершини і точка перетину прямої, що їх сполучає, зі спільною стороною цих трикутників.

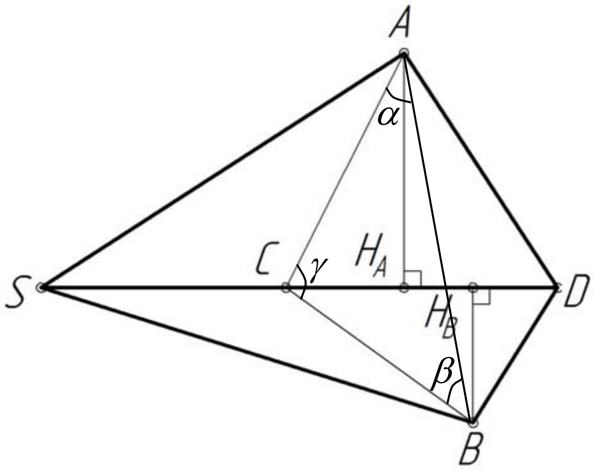

Рис. 5. Відповідність площ і довжин у тривимірному просторі

Далі розглянемо аналогічну задачу у тривимірному просторі, в симплексі $SBDA$ (рис. 5). Для цього повернемо площину SDA навколо прямої SD на деякий кут $\angle ACB = \gamma \neq \pi n$. При цьому, площі трикутників SBD і SDA залишаться незмінними. Також не зміниться положення точки C на прямій SD, а отже і довжини відрізків BC і CA залишаться незмінними. Значить співвідношення (5) залишається незмінним як для плоского випадку, так і для просторового.

Якщо розглядати просторовий випадок окремо, не враховуючи рисунок 4, то точку C на прямій SD потрібно обирати таким чином, щоб кути $\angle ACD$ і $\angle BCD$ були рівними. Тоді трикутники BH_BC і AH_AC – подібні і співвідношення (5) залишається незмінним як для плоского випадку, так і для просторового. У цьому випадку площина ACB займає особливе положення в симплексі $SBDA$.

Якщо до дво- і тривимірного випадків (рис. 4, 5) застосувати метод рухомого симплексу [7], при якому точки A і B симплексу $SBDA$ рухаються по прямих, паралельних відрізку SD, то у результаті цього, площі рухомих трикутників SBD і SDA не змінюються тому, що не змінюються довжини відрізків AH_A і BH_B, здійснюючи, фактично, паралельний перенос.

Враховуючи співвідношення (2) і (5), отримаємо узагальнену теорему синусів для тривимірного простору.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{S_{SBD}}{S_{SDA}} \text{ або } \frac{S_{SBD}}{\sin\alpha}=\frac{S_{SDA}}{\sin\beta}. \qquad (6)$$

Таким чином, у розглянутому випадку ребро SD піраміди $ABDS$ було прийнято за пряму зламу площин ASD і BDS, а ребро BA прийняте за противідрізок [1-3] кута зламу $\angle ACB=\gamma$ трикутника ACB. Аналогічним чином можна отримати співвідношення і для інших пар противоребер піраміди $ABDS$, які є мимобіжними.

Визначимо теорему синусів у чотиривимірному просторі (рис. 6). Площина SED є площиною зламу тетраедрів $SEDA$ і $SEDB$ з кутом зламу $\angle ACB=\gamma$. Якщо кут зламу $\angle ACB=\pi n$, то точки A, B, D, E і S належать тривимірному простору (цей випадок показано на рис. 6). А якщо кут зламу $\angle ACB\neq\pi n$, то отримаємо більш загальний випадок точки A, B, D, E і S належать чотиривимірному простору і утворюють два тетраедри $SEDA$ і $SEDB$ (рис. 7).

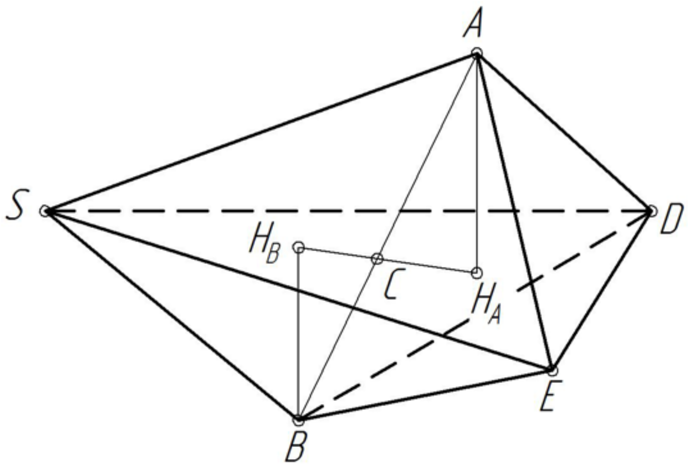

Рис. 6. Тетраедри $SEDA$ і $SEDB$ з кутом зламу $\angle ACB=\gamma=\pi n$ в чотиривимірному просторі $SBEDA$

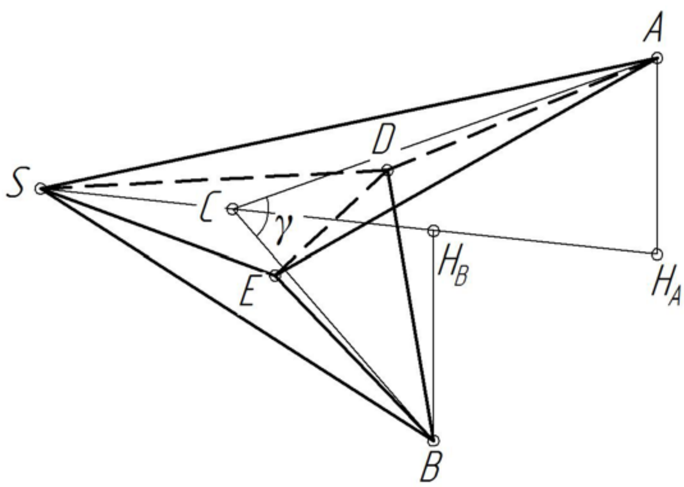

Рис. 7. Тетраедри $SEDA$ і $SEDB$ з кутом зламу $\angle ACB=\gamma\neq\pi n$ в чотиривимірному просторі $SBEDA$

У цьому випадку також маємо площину ACB, яка займає особливе положення в симплексі $SBEDA$. Ця площина визначається двома паралельними відрізками AH_A і BH_B. На рисунку 6 маємо окремий випадок, коли площина ACB вироджується у пряму, тобто $\angle ACB = \pi n$, а трикутники BH_BC і AH_AC – подібні. На рисунку 7 показано загальний випадок, коли $\angle ACB \neq \pi n$. При цьому, щоб виконати умову подібності трикутників BH_BC і AH_AC, площина ACB повинна зайняти особливе положення відносно симплекса $SBEDA$, таке щоб виконувалась умова $\angle ACH_A = \angle BCH_B$. Виконавши цю умову, отримаємо наступне співвідношення:

$$\frac{BH_B}{AH_A} = \frac{BC}{CA} = BAC. \qquad (7)$$

Визначимо відношення об'ємів тетраедрів $SEDA$ і $SEDB$ в симплексі чотиривимірного простору $SBEDA$. Відповідно до БН-числення [4-6], відношенню об'ємів тетраедрів $SEDA$ і $SEDB$ відповідає відношення відрізків AC і CB.

$$\frac{V_{SEDB}}{V_{SEDA}} = \frac{BC}{CA} = BAC, \qquad (8)$$

де V_{SEDA} і V_{SEDB} - це об'єми тетраедрів $SEDA$ і $SEDB$.

Враховуючи вирази (7) і (8), отримаємо теорему синусів у чотиривимірному просторі.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{V_{SEDB}}{V_{SEDA}} \text{ або } \frac{V_{SEDB}}{\sin\alpha} = \frac{V_{SEDA}}{\sin\beta}. \qquad (9)$$

На підставі всього вищесказаного, можна зробити висновок, що теорема синусів може бути узагальнена не тільки на тривимірний, а й на багатовимірний простори. У двовимірному просторі відношенню синусів кутів відповідає відношення довжин відрізків (2). У тривимірному просторі відношенню синусів кутів відповідає відношення площ трикутників (6). У чотиривимірному просторі відношенню синусів кутів відповідає відношення об'ємів тетраедрів (9), які є тривимірним узагальненням трикутника і так далі.

Висновки. В статті представлено узагальнення теореми синусів у багатовимірному просторі, що дозволило використовувати її не тільки для визначення кутів і довжин відрізків, а також для визначення площ, об'ємів, тощо.

Література

1. Геометричний сенс узагальнених тригонометричних функцій. [Балюба І.Г., Верещага В.М., Конопацький Є.В., Шацький В.В.] / Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С.42-47.

2. *Конопацький Є.В.* Суть узагальнення стандартних тригонометричних функцій / Конопацький Є.В. / Матеріали ІІ-ї Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності». Вип. 2. – К.: ДІЯ, 2013 р. – С.112-117.

3. *Конопацький Є.В.* Теорема синусов в трехмерном пространстве / Конопацький Є.В. / Вопросы образования и науки в XXI веке / Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 29 апреля 2013: в 11 частях. Часть 7; М-во обр. и науки РФ. Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2013. – С.100-101.

4. *Балюба І.Г.* Основи математичного апарату точкового числення / Балюба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П. Праці // Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 29. – Мелітополь: ТДАТА, 2005.– С.22-30.

5. Точечное исчисление – математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм. [Балюба И.Г., Полищук В.И., Горягин Б.Ф., Малютина Т.П.] // Материалы Международной научной конференции «Моделирование – 2008», 14-16 мая 2008 р., г. Киев, Том 2. – С.286-290.

6. *Найдиш В.М.* Алгебра БН-исчисления / Найдыш В.М., Балюба И.Г., Верещага В.М.// Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.210-215.

7. *Конопацький Є.В.* Теоретичні основи точкового визначення поверхонь зі змінним симплексом / Конопацький Є.В., Поліщук В.І. // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. Вип. 22. Частина 2. – Луцьк: ЛДТУ. – 2008. – С.276-281.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.М. Верещага, Е.В. Конопацкий

В статье предложен новый подход, который обобщает теорему синусов и позволяет представить её не только в двухмерном пространстве, а и в пространствах более высоких размерностей.

THE THEOREM OF SINE IN MULTIDIMENSIONAL SPACE

E. Konopatsky, V. Vereshchaga

In article the new advance which generalizes the theorem of sine is offered and allows presenting it not only in two-dimensional space, but in spaces of higher dimensions.