

**НАБЛИЖЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ВЕРШИНИ І НАПРЯМНОЇ
ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ КОНІЧНОЇ ПОВЕРХНІ**

*Національний університет водного господарства та
природокористування, Україна*

*Розроблено алгоритм наближеного визначення вершини і
напрямної дискретно представленої конічної поверхні. Проаналізовано
величину відхилення апроксимуючої напрямної дискретно
представленої конічної поверхні від дійсної.*

Постановка проблеми. Нехай конічна поверхня представлена точковим каркасом в межах деякого відсіку. Тоді методи дискретної інтерполяції дозволяють згущувати точковий каркас до необхідної точності [3]. При цьому точки згущення будуть знаходитися лише в межах згаданого відсіку. Якщо з деяким наближенням у кожній точці дискретно представленої поверхні (ДПП) вдасться отримати твірну конічної поверхні (пряму лінію), то у зв'язку з її необмеженістю ми будемо мати інформацію про поверхню далеко за межами заданого відсіку. Зрозуміло, що по мірі віддалення від нього точок вздовж твірних точність наближення буде зменшуватися.

Формулювання цілей та завдання статті. В роботі поставлено мету – розробити алгоритм наближеного визначення вершини та напрямної дискретно представленої конічної поверхні і оцінити його точність на прикладі різних конічних поверхонь.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Наскільки відомо авторам з літературних джерел, досі це питання в такому аспекті ніким не розглядалося.

Основна частина. Для наближеного визначення координат вершини можна скористатися наступною властивістю конічних поверхонь: усі твірні поверхні перетинаються у цій вершині.

Алгоритм наближеного визначення координат вершини ДПП складається з таких дій.

1. Визначаємо координати нормалей для ДПП. Комп'ютерні експерименти показали, що найбільш точним способом визначення нормалі для ДПП є спосіб, у якому проекції нормалі обчислюються як координати нормалі до дотичної площини, отриманої шляхом розв'язання оптимізаційної задачі: сума абсолютних значень відстаней від цієї площини до точок околу досліджуваної точки, повинна бути мінімальною. Початкові параметри площини задавались рівними коефіцієнтам рівняння площини, перпендикулярної до нормалі, координати направляючого вектора якої визначені як середнє значення проекцій на відповідну

координатну вісь нормалей усіх трикутних сіткових комірок, інцидентних досліджуваній точці. Цей спосіб дає найточніші результати лише для середніх (не крайніх) точок відсіка поверхні. Тому для наближеного визначення координат вершини і напрямної використовувались лише вони[2].

2. Векторний добуток нормалей, побудованих до континуально заданої конічної поверхні, дозволяє отримати координати твірних, які перетинаються у вершині цієї поверхні. У випадку нормалей, отриманих для ДПП, це не виконується, оскільки їхні напрями визначені з певним відхиленням від дійсних значень. У даному алгоритмі визначалися три вектори – векторні добутки трьох пар нормалей, побудованих у вершинах кожної трикутної сіткової комірки, а на векторах – три пари точок, які є кінцями спільних перпендикулярів між парами цих векторів. Перше наближення координат вершини конуса обчислювалось як середнє значення координат кінців усіх перпендикулярів, отриманих для усіх досліджуваних трикутних комірок.

3. По черзі використовуючи кожну не крайню точку відсіку поверхні, визначаємо координати апроксимуючих твірних ДПП шляхом обчислення векторних добутків нормалей, побудованої в цій точці, і нормалей, отриманої для кожної з інших середніх точок, та мінімізуємо функцію, яка є сумою відстаней від вершини конуса до твірних цієї ДПП. В якості початкового наближення до координат вершини конуса використовуємо координати вершини, отримані в пункті 2.

4. Розв'язання оптимізаційної задачі у пункті 3 часто дає досить грубе наближення координат вершини конуса, що пов'язано як із способом визначення початкових параметрів для функції пункту 3, так і з тим, що координати нормалей для ДПП визначені з певним відхиленням від дійсних значень. Тому, щоб уточнити координати вершини конуса, збільшуємо область можливого розташування цієї вершини, по черзі роблячи кожну із твірних рухомою (нагадаємо, що твірні отримані як векторний добуток пар нормалей). Мінімізуємо функцію, яка також є сумою відстаней від вершини конуса до твірних цієї ДПП. Початковими параметрами координат вершини є розв'язок для тієї функції пункту 3, значення якої було найменшим серед усіх значень, отриманих для середніх точок, а на параметри рухомих нормалей накладаємо лінійні обмеження. Области, які обмежують розташування рухомих нормалей, визначаються так, як це описано в роботі [1]. При цьому отримані в процесі мінімізації значення функції порівнюється з мінімальним значенням цільової функції пункту 3, отриманим для вибраної середньої точки. Якщо значення функції пункту 4 менше за значення функції пункту 3, то надалі порівнюється значення функції пункту 4 з цим меншим значенням. При цьому замінюємо початкові параметри координат вершини конуса на щойно отримані і фіксуємо нове положення нормалей. Після цього дана операція по черзі виконується для кожної з твірних. Описана вище частина

алгоритму повторюється доти, доки зменшується значення цільової функції пункту 4.

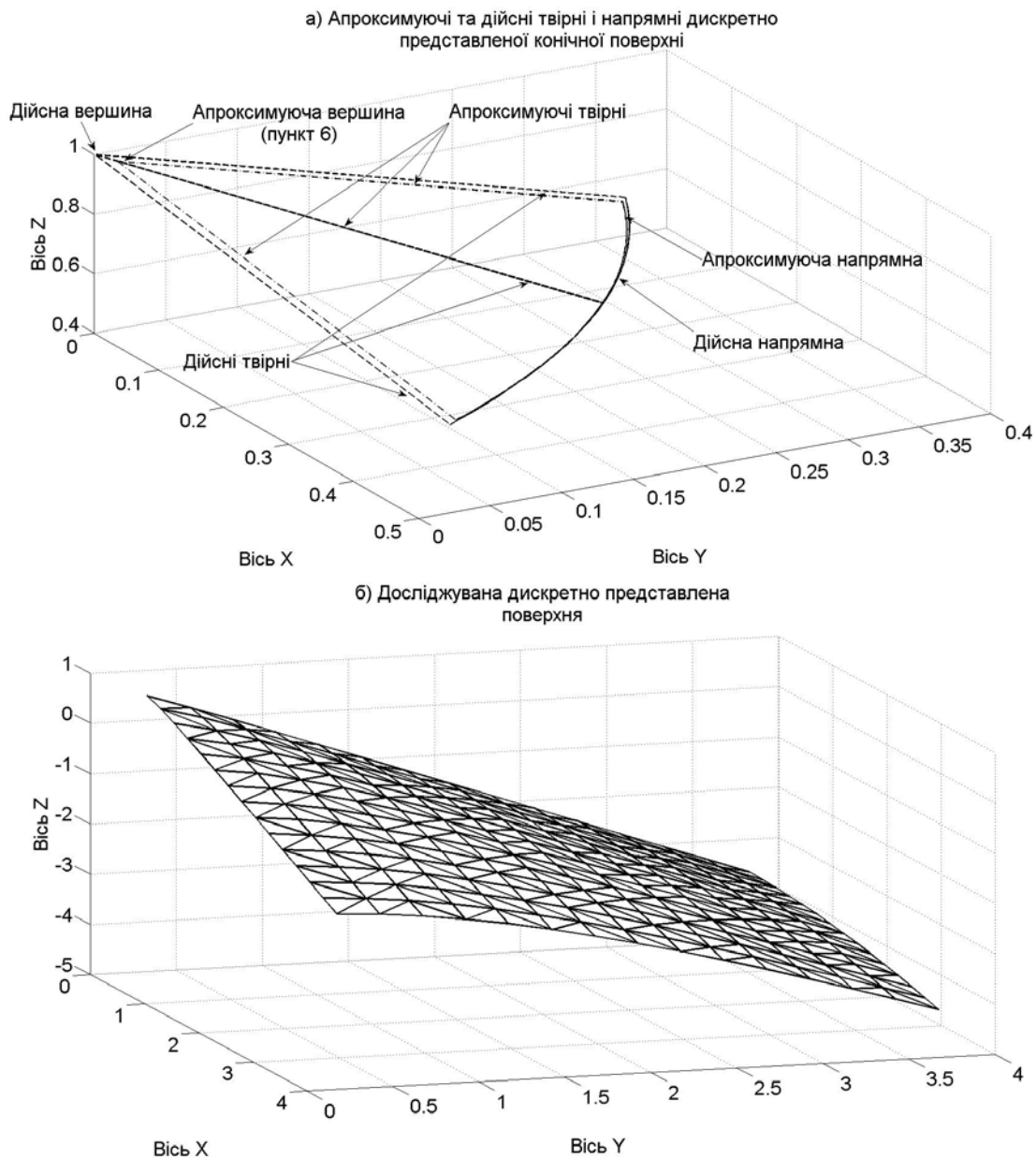


Рис. 1. Апроксимуючі та дійсні твірні і напрямні ДПП (а) та відсік досліджуваної ДПП (б)

5. Мінімізуємо функцію, яка є сумою відстаней від вершини поверхні до твірних цієї ДПП. Початковими параметрами координат вершини є параметри, отримані в пункті 4. При цьому твірні, які є векторним добутком двох нормалей, вважаються рухомими не по черзі, як в попередньому пункті, а одночасно. Області, які обмежують розташування нормалей, і початкові параметри цих нормалей є аналогічними описаним у пункті 4.

6. Після уточнення координат вершини у пунктах 4 і 5 визначаємо остаточні апроксимуючі координати вершини ДПП, мінімізуючи функцію,

яка є сумою відстаней від вершини поверхні до твірних цієї ДПП, координати яких відповідають координатам твірних, отриманих після мінімізації функції пункту 5. Початковими параметрами координат вершини конуса є параметри, отримані в пункті 5.

Для визначення дискретно представленої напрямної конуса проводимо твірні через апроксимуючу вершину поверхні і усі точки ДПП (в тому числі і крайні точки). Задаємо довільну площину, наприклад перпендикулярну до однієї з побудованих твірних. Визначаємо координати точок, в яких твірні перетинають площину. В результаті точки утворять апроксимуючу дискретно представлену плоску напрямну конічної поверхні.

Ефективність розробленого алгоритму була перевірена на дев'яти відсіках різних конічних поверхонь. При цьому поверхні задавались континуально, після чого на них розбивалась сітка з трикутними комірками, тобто формувалась ДПП. На рис. 1, а продемонстровані результати роботи алгоритму на прикладі відсіку конічної поверхні,

описаної рівнянням $z = -\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{0.7}} + 1$ (рис. 1, б).

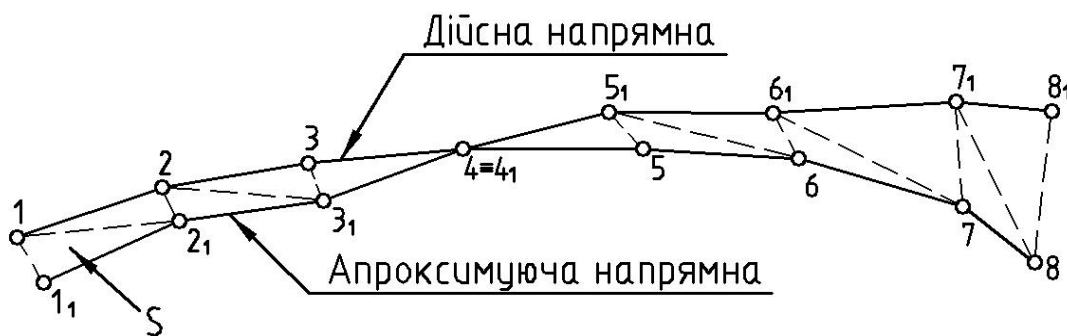


Рис. 2. До оцінки величини відхилення апроксимуючої дискретно представленної напрямної від дійсної

Точність визначення апроксимуючої напрямної ДПП можна оцінити, обчисливши площу S (рис. 2) поверхні, утвореної після з'єднання відповідних точок дійсної і апроксимуючої напрямних ДПП. Дійсна і апроксимуюча напрямна побудовані в площинах, які перпендикулярні до відповідної твірної і проходять через спільну точку ДПП. На площу S в значній мірі впливає величина осциляцій точок апроксимуючої напрямної. Наявність і величина осциляцій залежать від відстані між дійсною та апроксимуючою вершинами конуса. Якщо згадані вище площини провести через точку, найближчу до дійсної вершини конуса, і за одиницю довжини прийняти 1 м , то площа відхилення S для досліджуваної поверхні (рис. 1, б) складатиме $0,0011\text{ м}^2$. Відстань між апроксимуючою і дійсною вершинами становить $0,0239\text{ м}$. Максимальний кут між апроксимуючою і дійсною твірними дорівнює $0,0085\text{ рад}$.

Висновки і перспективи подальших досліджень. В статті розроблений алгоритм наближеного визначення вершини і напрямної дискретно представленої конічної поверхні. Проаналізовано величину відхилення апроксимуючої дискретно представленої напрямної від дійсної. Апроксимуюча напрямна має осцилюючі ділянки, тому потребуватиме подальшої згладжувальної апроксимації. Далі планується розробити алгоритми наближеного визначення твірних і напрямних інших дискретно представлених лінійчатих поверхонь.

Література

1. *Літницький С.І., Пугачов Є.В.* Наближене визначення осі обертання і твірної дискретно представленої поверхні обертання // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет - Вип.4, т. 56. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – С. 118-125.
2. *Літницький С.І., Пугачов Є.В.* Порівняння способів визначення нормалі для дискретно представленої поверхні // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет - Вип.4, т. 55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 148-151.
3. *Найдиш В.М.* Основи прикладної дискретної геометрії / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.М. Найдиш, В.М. Малкіна – Мелітополь: Люкс, 2007 – 193 с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРШИНЫ И НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

С. И. Литницкий, Е. В. Пугачев

Разработан алгоритм приближенного определения вершины и направляющей дискретно представленной конической поверхности. Проанализированы величины отклонения аппроксимирующей направляющей дискретно представленной конической поверхности от действительной.

THE VERTEX AND DIRECTING OF DISCRETELY PRESENTED CONIC SURFACE APPROXIMATE DEFINITION

S. I. Litnitskiy, E. V. Pugachov

The algorithm of the vertex and directing of discretely presented conic surface approximate definition is made. Deviation value of approximate discretely presented conic surface directing from real one is analyzed.