

## УНАОЧНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ SIN-ГОРДОНА

*Українська державна академія залізничного транспорту (м. Харків)*

*Наведено спосіб унаочнення псевдосферичних поверхонь, які відповідають різновидам розв'язків диференціального рівняння синус-Гордона, і які можна описати на основі перетворення Беклунда.*

**Постановка проблеми.** Становлення сучасної науки неможливо без розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь. Особливе місце серед них займає рівняння sin-Гордона, яке описує фізичні процеси в нелінійних середовищах [1,2,5]. Для прикладної геометрії це рівняння цікаве тим, що воно має природну графічну інтерпретацію, пов'язану з унаочненням різновидів поверхонь постійної від'ємної гауссової кривини (скорочено псевдосфер). Рівняння sin-Гордона дозволяє досліджувати солітон як нелінійну усамітнену (відокремлену) хвилю у вигляді імпульсу, здатну поширюватися у нелінійному середовищі без зміни форми й без втрат енергії. Інтерпретація геометричного образу солітона за допомогою поверхонь постійної від'ємної кривини поєднує результати теорії нелінійних хвиль, описи диференціальної геометрії поверхонь та можливості комп'ютерної графіки [3,4]. Шведський математик Беклунд, розглядаючи геометрію поверхонь із постійною від'ємною кривиною, в 1876 р. вказав на спосіб побудови ієрархії розв'язків рівняння sin-Гордона, коли новий розв'язок можна знайти на базі відомих розв'язків.

**Аналіз основних досліджень і публікацій.** Для рівняння sin-Гордона

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \psi(x, t) = a \sin(\psi(x, t)), \quad (1)$$

перетворення Беклунда можна представити [1,2] у вигляді

$$\frac{1}{2}(\psi + \tilde{\psi})_x = a \sin \frac{1}{2}(\psi - \tilde{\psi}); \quad \frac{1}{2}(\psi - \tilde{\psi})_t = \frac{1}{a} \sin \frac{1}{2}(\psi + \tilde{\psi}). \quad (2)$$

Диференціюючи (тут і далі похідну позначено індексом) перше рівняння по  $x$ , а друге - по  $t$ , підставляючи значення перших похідних знову з (2), додаючи або віднімаючи отримані рівняння й використовуючи тотожність  $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ , одержуємо, що обидві функції  $\psi$  і  $\tilde{\psi}$  задовольняють тому самому рівнянню  $\psi_{tx} = \sin \psi$ . Подібні перетворення, що зв'язують два розв'язки того самого рівняння, називають автоперетворенням (або скорочено - перетворенням) Беклунда. Підставляючи в (2) очевидний

розв'язок рівняння  $\sin$ -Гордона  $\tilde{\psi}_0 = 0$  і інтегруючи один раз кожне з рівнянь, одержуємо розв'язок – «кінк» рівняння  $\sin$ -Гордона

$$\psi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp(ax + t/a + \varphi_0) \quad (3)$$

Розглянемо тепер дві розв'язки (3)  $\psi_1$  і  $\psi_2$  з різними параметрами  $a_1$  і  $a_2$ . Припустимо, що один і той же розв'язок  $\psi_3$  пов'язаний перетворенням Беклунда із параметром  $a_1$  з розв'язком  $\psi_2$  і перетворенням Беклунда із параметром  $a_2$  з розв'язком  $\psi_1$ .

Тоді ми можемо записати перетворення Беклунда для пар  $(\psi_0, \psi_1)$ ,  $(\psi_0, \psi_2)$ ,  $(\psi_1, \psi_3)$  і  $(\psi_2, \psi_3)$ . Складаючи першу і третю пару, а потім віднімаючи від них суму другої і четвертої, одержуємо [4] вираз без похідних, що зв'язує всі чотири розв'язки:

$$a_1 \sin \frac{1}{4}(\psi_0 - \psi_1 + \psi_2 - \psi_3) = a_2 \sin \frac{1}{4}(\psi_0 + \psi_1 - \psi_2 - \psi_3) \quad (4)$$

З формули (4) одержуємо

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\psi_3 - \psi_0) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\psi_2 + \psi_1) \quad (5)$$

Підставляючи розв'язки  $\psi_1$  і  $\psi_2$  із (3) в тотожність (5), одержуємо двохсолітонний розв'язок рівняння  $\sin$ -Гордона у вигляді [5]

$$\psi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \frac{\exp \theta_1 - \exp \theta_2}{1 + \exp(\theta_1 + \theta_2)} \right), \quad (6)$$

де  $\theta_i = a_i x + t/a_i + \varphi_i$  - фаза відповідного розв'язку.

**Постановка задачі.** Розробити спосіб унаочнення псевдосферичних поверхонь, які відповідають різновидам розв'язків диференціального рівняння  $\sin$ -Гордона, і форму яких можна описати на основі перетворення Беклунда.

**Основна частина.** Наведемо зв'язок між описами псевдосфер Діні і Куена. Нехай маємо псевдосферичну поверхню Діні, описану виразом

$$r := \left[ \frac{\cos(-u + v)}{\cosh(u + v)}, \frac{\sin(-u + v)}{\cosh(u + v)}, u + v - \tanh(u + v) \right] \quad (7)$$

Псевдосфері Діні відповідає солітон (його позначають 1-солітон)

$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2(k(x - 4k^2t))}, \quad (8)$$

графік якого [4] має вигляд горба (рис. 1).



Рис. 1. Графік 1-солітона на «якісному» рівні

На рис. 2 зображено псевдосферу Діні для порівняння з «класичною» параметризацією (ліворуч) та з параметризацією асимптотичними кривими, тобто з мережею Чебишева (праворуч).

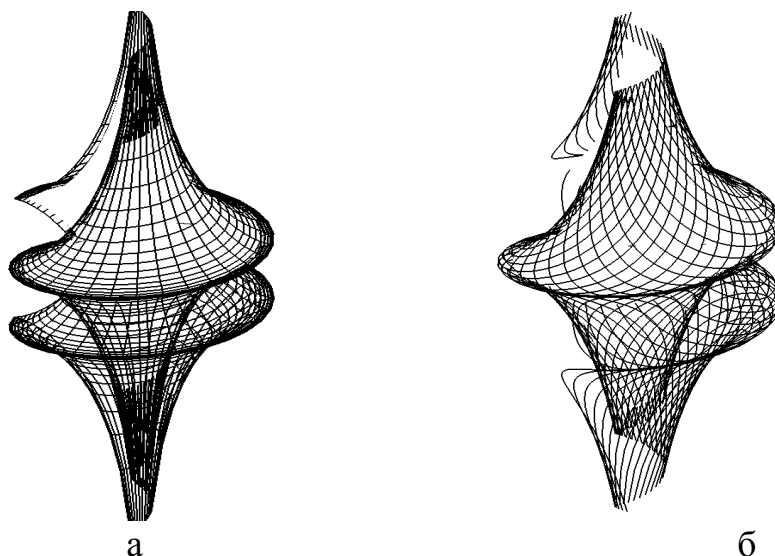


Рис. 2. Псевдосфера Діні з «класичною» (а) параметризацією та «репараметризована» асимптотичними кривими (б).

З рис. 2б видно, що величина мережного кута при русі по поверхні Діні може змінюватися за графіком, наведеним на рис. 1.

Поставимо задачу описати і унаочнити за допомогою перетворення Беклунда поверхню Куена, використовуючи при цьому опис псевдосферичної поверхні Діні.

В середовищі процесора Maple відповідні перетворення для опису на аналітичному рівні можна здійснити [6] за допомогою операторів (тут і далі збережено синтаксис мови Maple):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{ru} := \mathbf{diff}(\mathbf{r}, \mathbf{u}); \\
 & \mathbf{ru} := \left[ \begin{array}{l} \frac{\sin(-u + v)}{\cosh(u + v)} - \frac{\cos(-u + v) \sinh(u + v)}{\cosh(u + v)^2}, \\ -\frac{\cos(-u + v)}{\cosh(u + v)} - \frac{\sin(-u + v) \sinh(u + v)}{\cosh(u + v)^2}, \tanh(u + v)^2 \end{array} \right] \\
 & \mathbf{rv} := \mathbf{diff}(\mathbf{r}, \mathbf{v});
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$rv := \left[ -\frac{\sin(-u+v)}{\cosh(u+v)} - \frac{\cos(-u+v) \sinh(u+v)}{\cosh(u+v)^2}, \frac{\cos(-u+v)}{\cosh(u+v)} - \frac{\sin(-u+v) \sinh(u+v)}{\cosh(u+v)^2}, \tanh(u+v)^2 \right] \quad (10)$$

Двохсолітонний розв'язок, одержаний як перетворення Беклунда

$$z2pq := 4 * \arctan((\exp(p*u+v/p) - \exp(q*u+v/q)) * (p+q) / (1 + \exp(p*u + v/p + q*u + v/q)) / (p-q));$$

$$z2pq := 4 \arctan \left( \frac{\left( e^{(u+v)} - e^{\left( q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1+q)}{\left( 1 + e^{\left( u+v + q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1-q)} \right) \quad (11)$$

$$z1p := 4 * \arctan((\exp(p*u + v/p)));$$

$$z1p := 4 \arctan(e^{(u+v)}) \quad (12)$$

$$sinsin1 := \sin((z1p + z2pq)/2) / \sin(z1p);$$

$$sinsin1 := \frac{\sin \left( 2 \arctan(e^{(u+v)}) + 2 \arctan \left( \frac{\left( e^{(u+v)} - e^{\left( q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1+q)}{\left( 1 + e^{\left( u+v + q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1-q)} \right) \right)}{\sin(4 \arctan(e^{(u+v)}))} \quad (13)$$

$$sinsin2 := \sin((z1p - z2pq)/2) / \sin(z1p);$$

$$sinsin2 := \frac{\sin \left( 2 \arctan(e^{(u+v)}) - 2 \arctan \left( \frac{\left( e^{(u+v)} - e^{\left( q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1+q)}{\left( 1 + e^{\left( u+v + q u + \frac{v}{q} \right)} \right) (1-q)} \right) \right)}{\sin(4 \arctan(e^{(u+v)}))} \quad (14)$$

Визначаються координатні функції опису результуючої поверхні.

**for i from 1 to 3 do**

**rr[i] := r[i] + 2\*p\*(ru[i]\*sinsin1 + rv[i]\*sinsin2)/(1 + p^2);**

**end;**

**R := [rr[1], rr[2], rr[3]];**

Після присвоєння необхідних значень параметрам **p** і **q** виконується унаочнення одержаного опису за допомогою оператора

**plot3d(R, u=-Pi..Pi, v=-Pi..Pi, scaling=constrained, axes=BOXED, view=[-2..2,-2..2,-6..6], orientation=[-120,70]);**

Приклад. Для  $p = 1$  і  $q = 0,98$  одержано такі складові частини елементів перетворення Беклунда:

$$z2pq := 4 \arctan \left( \frac{99.00000000 (e^{(u+v)} - e^{(0.98 u + 1.020408163 v)})}{1 + e^{(1.98 u + 2.020408163 v)}} \right);$$

$$z1p := 4 \arctan (e^{(u+v)})$$

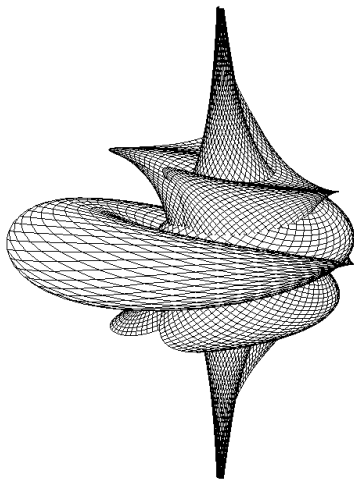
$$sinsin1 := \frac{\sin\left(\frac{z1p}{2} + \frac{z2pq}{2}\right)}{\sin(z1p)}; \quad sinsin2 := \frac{\sin\left(\frac{z1p}{2} - \frac{z2pq}{2}\right)}{\sin(z1p)};$$

$$x := r_1 + ru_1 sinsin1 + rv_1 sinsin2;$$

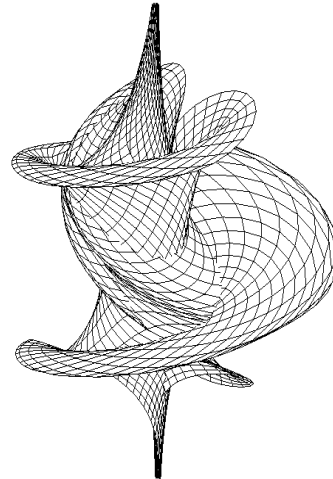
$$y := r_2 + ru_2 sinsin1 + rv_2 sinsin2;$$

$$z := r_3 + ru_3 sinsin1 + rv_3 sinsin2.$$

На рис.3 залежно від  $p$  і  $q$  зображено «некласичні» поверхні псевдосфери Куена, опис і унаочнення яких здійснено за допомогою перетворення Беклунда.



$$p = 1; q = 0,95$$



$$p = 1,5; q = 0,5$$

Рис. 3. Зображення псевдосфери Куена залежно від  $p$  і  $q$ .

При цьому, опис мережі асимптотичних ліній

$$v(u) = \arctan \left( \frac{2 e^{(-u)} \underline{Cl}}{\underline{Cl}^2 + e^{(-2u)}}, \frac{-e^{(-2u)} + \underline{Cl}^2}{\underline{Cl}^2 + e^{(-2u)}} \right) \quad (15)$$

$$v(u) = \arctan \left( \frac{2 e^u \underline{Cl}}{1 + e^{(2u)} \underline{Cl}^2}, \frac{e^{(2u)} \underline{Cl}^2 - 1}{1 + e^{(2u)} \underline{Cl}^2} \right)$$

на псевдосфері Куена було знайдено із диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{du} v(u) = -\sin(v(u)), \quad \frac{d}{du} v(u) = \sin(v(u)) \quad (16)$$

На рис.4 наведено зображення «класичної» псевдосфери Куена, причому, ліворуч зображено її «стандартну» параметризацію, а праворуч зображено репараметризовану поверхню за допомогою асимптотичних кривих, які утворюють мережу Чебишева.

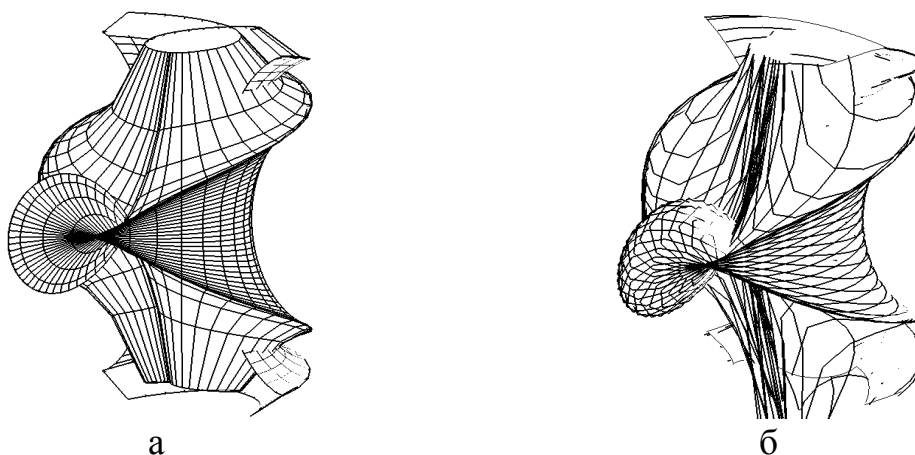


Рис. 4. Псевдосфера Куена з «класичною» (а) параметризацією та «репараметризована» асимптотичними кривими (б).

Аналіз переміщення по мережі Чебишева псевдосфери Куена на якісному рівні дозволяє зробити висновок, що «узагальнений» солітон має вигляд «процесу взаємодії» двох солітонів (рис. 5):

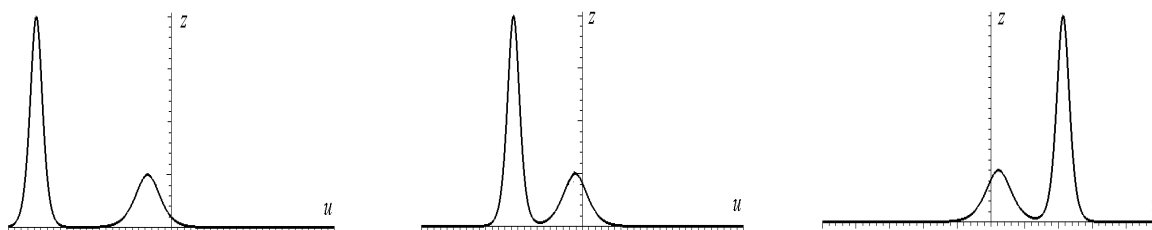


Рис. 5. Результат взаємодії двох солітонів у певні моменти часу

Поверхні Куена відповідає [3] розв'язок рівняння  $\sin$ -Гордона у вигляді опису 2-солітона, узагальнене рівняння якого має вигляд

$$u = -2 \frac{k_1^2 k_2^2 (\cosh^2 K_1 - \cosh^2 K_2 + 1) + k_1^4 (\cosh^2 K_2 - 1) - k_2^4 \cosh^2 K_1}{(k_1 \sinh K_2 \sinh K_1 - k_2 \cosh K_1 \cosh K_2)^2}, \quad (17)$$

де  $K_1 = k_1(x - 4k_1^2 t)$ ;  $K_2 = k_2(x - 4k_2^2 t)$ .

**Висновок.** За формулою (17) можна побудувати анімаційні кадри взаємодії двох солітонів, при чому, пара солітонів буде описана єдиним рівнянням (17). За допомогою алгоритму побудови нових псевдосферичних поверхонь на основі перетворення Беклунда можна одержати розв'язки нелінійного диференціального рівняння  $\sin$ -Гордона.

### Література

1. Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов / Лэм Дж.Л. Изд-во Меркурий-ПРЕСС, г. Череповец, 2000 г.
2. Маевский Е.В. Асимптотические методы в некоторых задачах математической физики, связанных с уравнениями типа  $\sin$ -Гордона и геометрией псевдосферических поверхностей. / Маевский Е.В. Дисс. ... к. ф-м. н. по спец. 01.01.03 – математическая физика. М.: 2004, – 122 с.
3. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, – 96 с.
4. Позняк Э.Г. Уравнение синус-Гордона: Геометрия и физика. Новое в жизни, науке, технике. / Позняк Э.Г., Попов А.Г. Сер. «Математика, кибернетика». – Т. 6. М.: Знание, 1991. – 45 с.
5. Попов А.Г. Аналитические подходы к исследованию уравнений  $\sin$ -Гордона и псевдосферических поверхностей / Попов А.Г., Маевский Е.В. // Современная математика и ее приложения. Том 31 (2003). С. 13–52.
6. Мисюра М.І. Геометричне моделювання усамітнених хвиль методом псевдосфер. Дисертація ... канд.. техн.. наук по спец. 05.01.01 – прикладна геометрія, інженерна графіка, Мелітополь: ТДАТУ – 2008, – 163с.

### ВИЗУАЛИЗАЦІЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ SIN-ГОРДОНА

*Г.В.Морозова*

Приведен способ визуализации псевдосферических поверхностей, соответствующих разновидностям решений дифференциального уравнения синус-Гордона, и которые можно описать на основе преобразования Беклунда.

### VISUALIZATION OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF SIN-GORDON

*G. Morozova*

The way of visualization of the pseudo-spherical surfaces answering to versions of solutions of the differential equation a sin-Gordon and which can be described on the basis of Beklund's transformation is given.