УДК 515.2 **Г.В.Морозова,** к.т.н.

НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ СОЛІТОНІВ ТА ЇХ ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Українська державна академія залізничного транспорту (м. Харків)

Проілюстровано графоаналітичний факт, наведений у роботі [1], згідно якого існує відповідність між трійкою понять – рівнянням солітона, миттєвою геометричною формою його прояву (його графіком), а також псевдосферою, чебишевськими мережними кутами на якій можна проілюструвати поведінку солітона.

Постановка проблеми. Дивна єдність багатьох різних за своєю природою явищ і пов'язаних з ними математичних моделей може бути пояснена в значній кількості випадків, якісною аналогією диференціальних рівнянь, що їх описують. Цей феномен виявляється у їхніх геометричних інтерпретаціях. Виявлений вперше наприкінці минулого сторіччя взаємозв'язок рівняння sin-Гордона і чебишевських мереж спеціальних геометричних об'єктів на псевдосферичних поверхнях (і в загальному - на площині Лобачевского) дав поштовх розвитку багатьом розділам науки. Істотне узагальнення полягало в установленні еквівалентності широких класів нелінійних рівнянь сучасної математичної фізики й спеціальних типів координатних мереж, які їм відповідають на псевдосферичних поверхнях.

У цілому, сутність усякого геометричного підходу до дослідження певного завдання складається в зіставленні досліджуваному завданню деякого геометричного образа (об'єкта), аналіз якого може бути проведений у рамках добре розвинутої геометричної методології. І в нашому випадку повнота геометрії Лобачевського представляється досить достатньою для уніфікації широкого кола завдань математичної фізики, де нелінійні рівняння відіграють ключову роль [2].

Аналіз основних досліджень і публікацій. У 1872 році були опубліковані результати французького вченого Ж.Буссинеска, присвячених теоретичним дослідженням відокремлених хвиль у каналах (подібних до хвилі Рассела). Буссинеск одержав рівняння [3-5]:

$$u_{tt} = c_0^2\left(u + \frac{3}{2d}u^2 + \frac{1}{3}d^2 u_{xx}\right)_{xx}. \qquad (1)$$

Тут u – зсув вільної поверхні води в каналі, d – глибина каналу, c_0 – швидкість хвилі, t – час, x – просторова змінна (індекс відповідає диференціюванню по відповідній змінній). Було визначено їхню форму (гіперболічний секанс) і швидкість.

Досліджувані хвилі Буссинеск називав спучуваннями й розглядав спучування додатної і від'ємної висоти. Буссинеск обґрунтував стійкість додатних спучувань тим, що їхні малі збурювання після виникнення швидко загасають. У випадку від'ємного спучування утворення стійкої форми хвилі неможливо, як і для довгих і додатних дуже коротких спучувань. Трохи пізніше, в 1876 році, опублікував результати своїх досліджень англієць лорд Релей [6].

Постановка задачі. Проаналізувати спостереження, наведене у роботі [1], згідно якого є відповідність між трійкою понять – рівнянням солітона, миттєвою геометричною формою його прояву (тобто його графіком), а також псевдосферою, чебишевськими мережними кутами на якій можна проілюструвати поведінку солітона.

Основна частина. Наступним важливим етапом у розвитку теорії солітонів стала робота Дидерика Иоханнеса Кортевега та його учня Густава де Вріза [2]. Ними було виведене рівняння для хвиль у досить широких каналах постійного поперечного перерізу, що носить нині їхні імена – рівняння Кортевега-де Вріза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2)$$

Розв'язок такого рівняння має вигляд

$$u(x,t) = -\frac{c}{2}\sec h^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - x_0 - ct)] \quad (3)$$

й описує хвилю, у свій час виявлену Расселом. Основні досягнення цього дослідження складалися в розгляді більш простого рівняння, яке описує хвилі, що біжать в одному напрямку.

Здатність солітона зберігати при поширенні свою форму незмінною пояснюється тим, що поводження його визначається двома діючими взаємно протилежними процесами.

По-перше, це, так зване, *нелінійне укручення* (тобто фронт хвилі досить великої амплітуди прагне перекинутися на ділянках наростання амплітуди, оскільки задні частки, що мають більшу амплітуду, рухаються «швидше хвилі»).

По-друге, проявляється такий процес як *дисперсія* (тобто залежність швидкості хвилі від її частоти, обумовлена фізичними й геометричними властивостями середовища; при дисперсії різні ділянки хвилі рухаються з різними швидкостями й хвиля «розпливається»). Таким чином, нелінійне укручення хвилі компенсується її розпливом за рахунок дисперсії, що й забезпечує збереження форми такої хвилі при її поширенні [3, 4].

Відсутність вторинних хвиль при поширенні солітона свідчить про те, що енергія хвилі не розсіюється в просторі, а зосереджена в обмеженому просторі (тобто локалізована). Локалізація енергії є відмінною якістю «фізичної» частки. Ще однією дивною особливістю солітонів (відзначеної ще Расселом) є їхня здатність зберігати свої швидкість і форму при проходженні один через одного. Єдиним нагадуванням про взаємодію, що відбулася, є постійні зсуви спостережуваних солітонів від положень, які б вони займали, якби не зустрілися. Солітони не проходять один через одного, а відбиваються, подібно відбиттю пружних куль. У цьому проявляється аналогія солітонів із частками.

Солітонні розв'язки мають і так звані, родинні КдВ-рівняння:
- модифіковане КдВ-рівняння

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0; \tag{4}$$

- рівняння Бенджамина, Бона й Магони (ББМ)

$$u_t + c_0\left(1 + \frac{3}{2d}u\right)u_x - \frac{d^2}{6}u_{xxx} = 0, \tag{5}$$

уперше з'явилося при описі бори (хвилі на поверхні води, що виникають при відкриванні воріт шлюзів, при «запиранні» течії ріки);

- рівняння Борна - Інфельда

$$\left(1 - u_t^2\right)u_{xx} + 2u_t u_x u_{xt} - (1 + u_x^2)\, u_{tt} = 0 \tag{6}$$

має впровадження в теорії поля.

Далі розглянемо двовимірну диференціальну квадратичну форму з коефіцієнтами $E[z(u,v)]$, $F[z(u,v)]$, $G[z(u,v)]$, які залежать відомим чином від деякої функції $z = [z(u,v)]$ і її похідних. Звернемося до формули Гаусса

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{F}\left[\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^1 - \frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1\right] \tag{7}$$

для обчислення кривини K з розглянутими коефіцієнтами.

Права частина співвідношення (7) являє собою відомий вираз для кривини K через E, F, G їхні похідні по u і v до другого порядку включно. Якщо вважати кривину K апріорі заданою функцією (у випадку, що нас цікавить, $K=-1$), то співвідношення типу (7) можна розглядати як *диференціальне рівняння* для функції $z(u,v)$.

Таким чином, обрана псевдосферична метрика породжує рівняння

$$F[z(u,v)] = 0. \tag{8}$$

З геометричної точки зору розв'язок рівняння sin-Гордона $\frac{d^2 z}{dxdy} = \sin z$ (та можливого іншого «солітонного» рівняння) визначає мережний кут чебишевської мережі (рис. 1) на поверхнях із гауссовою кривиною -1 (скорочено – на псевдосфері).

Більше того, кожному розв'язанню рівняння sin-Гордона на такій поверхні відповідає деяка чебишевська мережа, побудована асимптотичних кривих [6].

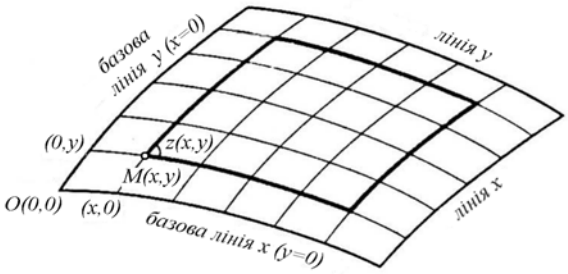

Рис. 1. Комірка чебишевської мережі (*z(x,y)* - мережний кут)

В роботі «Geometry of Solitons» авторів Terng C.L., Uhlenbeck K. із Northeastern University [1] наведено відповідність між трійкою понять – рівнянням солітона (або пари солітонів), миттєвою геометричною формою його прояву (тобто його графіком), а також псевдосферою, чебишевськими мережними кутами на якій можна проілюструвати поведінку солітона (або пари солітонів).

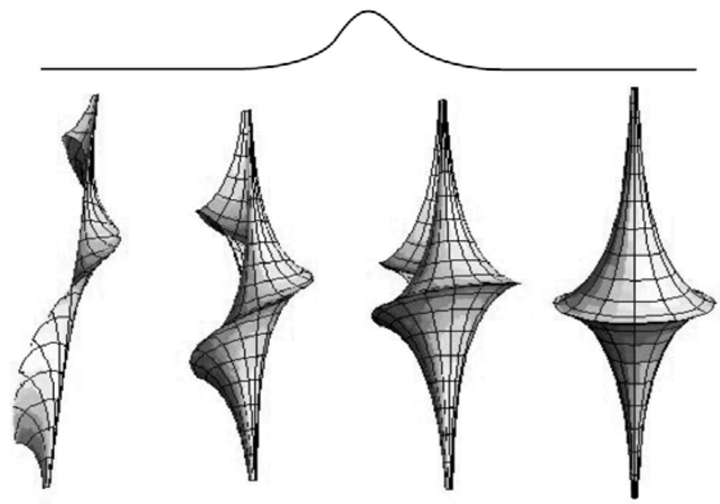

Рис. 2. Графік та псевдосфера Діні, які відповідають 1-солітону

На рис. 2 наведено графік та псевдосферу Діні [7], які відповідають так званому 1-солітону, рівняння якого має вигляд

$$q^*(x,t) = 4\tan^{-1}(e^{sx+\frac{t}{s}}). \quad (9)$$

На рис. 3 наведено графік та псевдосферу Куена [7], які відповідають так званому 2-солітону, рівняння якого має вигляд

$$q(x,t) = 4\tan^{-1}\left(\frac{s_1+s_2}{s_1-s_2}\ \frac{e^{s_1 x+\frac{1}{s_1}t} - e^{s_2 x+\frac{1}{s_2}t}}{1+e^{(s_1+s_2)x+(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2})t}}\right). \quad (10)$$

На рис. 3 наведено графік та псевдосферу Куена [7], які відповідають так званому бризерному солітону, рівняння якого має вигляд

$$q_3(x,t) = 4\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta\sin(T\cos\theta)}{\cos\theta\cosh(X\sin\theta)}\right), \quad (11)$$

де $X = x - t$ *and* $T = x + t$.

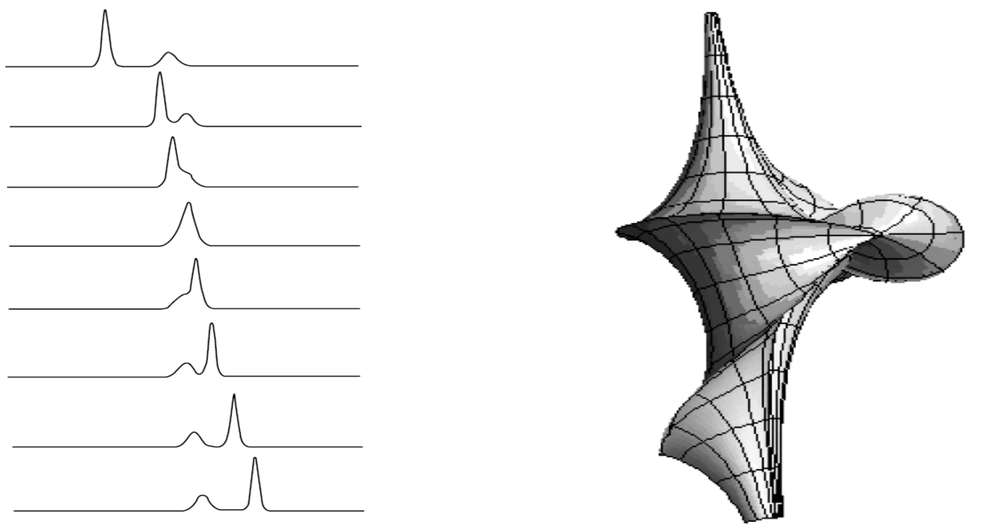

Рис. 3. Графік та псевдосфера Куена, які відповідають 2-солітону

Наведені приклади геометричних відповідностей відносяться до рівняння sin-Гордона. Вони базуються на поняттях чебишевських комірок на псевдосферичних поверхнях. Нагадаємо, що чебишевським мережам притаманна властивість, згідно якій в кожному мережному чотирикутнику протилежні сторони рівні. При цьому вводиться метрика поверхні, віднесена до чебишевської координації [6].

Висновок. Рівняння sin-Гордона є окремим випадком більш загального рівняння, до якого зводиться система рівнянь Гаусса й Петерсона-Кодацци для метрики, записаної в чебишевській системі координат. Рівняння sin-Гордона відповідає основним рівнянням теорії поверхонь, коли кривина квадрата лінійного елемента поверхні дорівнює мінус одиниці.

Література

1. *Terng C.L.,* Uhlenbeck K. Geometry of Solitons. Northeastern University, Volume 47, Number 1 p.2–17.
2. *Позняк Э.Г.* Геометрия Лобачевского и уравнения математической физики / Позняк Э.Г., Попов А.Г. // Докл. РАН. – 1993. – Т. 332, № 4. – С. 418–421.
3. *Березин Ю.А.* Моделирование нелинейных волновых процессов / Березин Ю.А. Новосибирск: Наука. 1982. – 160 с.
4. *Додд Р.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. / *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Пер. с англ. В.П.Гурария, В.И. Мацаева* / Шабат А.Б. ред. – Москва: Мир, 1988. – 695 с.
5. *Миура Р.* Солитоны в действии. / *Миура Р., Мозес Г., Герман Н.* Москва: Мир, 1981. – 312 с.
6. *Позняк Э.Г.* Уравнение синус-Гордона: Геометрия и физика. Новое в жизни, науке, технике. / *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* Сер. «Математика, кибернетика». – Т. 6. М.: Знание, 1991. – 45 с.
7. *Мисюра М.І.* Геометричне моделювання усамітнених хвиль методом псевдосфер. Дисертація … канд.. техн.. наук по спец. 05.01.01– прикладна геометрія, інженерна графіка, Мелітополь: ТДАТУ – 2008, – 20с.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОЛИТОНОВ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Г.В.Морозова

Проиллюстрирован графоаналитический факт, приведенный в работе [1], согласно которому существует соответствие между тройкой понятий – уравнением солитона, мгновенной геометрической формой его проявления (т.е. графиком), а также псевдосферой, чебышевскими сетевыми углами на которой можно проиллюстрировать поведение солитона.

NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SOLITONS AND THEIR GEOMETRICAL INTERPRETATION

G. Morozova

The graphic-analytical fact given in work [1] according to which there is a compliance between the three of concepts – the equation of a soliton, with an instant geometrical form of its manifestation (i.e. the schedule) is illustrated, and also on which it is possible to illustrate with a pseudosphere, chebyshevsky network corners behavior of a soliton.