УДК 514.181.2

С.Ф Пилипака, д.т.н.
Т.М. Захарова, аспірант

КОНСТРУЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ У ФУНКЦІЇ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ЗАДАННЯМ ЇХ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Сформульовано два шляхи пошуку просторових кривих у функції натурального параметра на основі різних плоских кривих, заданих параметричними рівняннями у функції довільного параметра, які є горизонтальними проекціями просторових. Для отриманих кривих наведено натуральні та параметричні рівняння у функції довжини власної дуги. Візуалізовано отримані результати.

Постановка проблеми. Просторові криві, описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра (довжини власної дуги), використовуються для розв’язання багатьох задач, зокрема у диференціальній геометрії, оскільки до них можна застосовувати формули Френе. Окрім того, криві з такою параметризацією застосовуються в задачах згинання листового матеріалу, для визначення кінематичних характеристик руху матеріальної частинки за певною траєкторією [1] тощо. Для просторових кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, завжди можна знайти натуральні рівняння: кривини та скруту. Однак множина таких кривих є досить обмеженою.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У наукових працях розроблено деякі підходи до конструювання просторових кривих за їх натуральним рівнянням [2, 3]. Наприклад, у [4] авторами сформульовано підходи до конструювання кривих у функції натурального параметра на поверхнях обертання, а у [5] – на поверхні псевдосфери. Проте множину кривих з такою параметризацією можна значно розширити, знаходячи нові способи їх конструювання. Зокрема, на основі плоскої кривої в деяких випадках можна отримати просторові криві, які можуть бути описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра, якщо плоску криву прийняти горизонтальною проекцією просторової.

Формулювання цілей та завдання статті. Розробити підходи до конструювання просторових кривих, описаних у функції натурального параметра і розташованих на циліндрі, горизонтальною проекцією якого є задана плоска крива.

Основна частина. Розглянемо приклад на основі параметричних рівнянь кола радіуса R:

$$x = R\cos t; \qquad y = R\sin t, \tag{1}$$

де t – незалежна змінна – в загальному довільний параметр, а для нашого випадку – кут повороту точки кола навколо його центру.

Для просторової кривої, описаної параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги s, має виконуватися наступна рівність:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \qquad (2)$$

Таким чином, з рівності (2) можна записати:

$$z = \int \sqrt{1-(x'^2 + y'^2)}dt, \qquad \text{тобто} \qquad z = t \cdot \sqrt{1-R^2}. \qquad (3)$$

Якщо приєднати залежність $z=z(t)$ із (3) до рівнянь кола (1), то в цілому ми отримаємо параметричні рівняння просторової кривої у функції натурального параметра s, оскільки буде виконуватися рівність (2). Отже незалежна змінна t відіграє роль довжини дуги, тому її просто потрібно поміняти на s. Для нашого випадку це буде гвинтова лінія.

Щоправда, при цьому не завжди можливе інтегрування виразу (3), а якщо воно і можливе, то ми отримуємо тільки одну просторову криву для заданої горизонтальної проекції $x=x(t); y=y(t)$.

Можна розширити пошук кривих, прирівнявши вираз для знаходження довжини дуги до певної функції $f=f(t)$:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = f. \qquad (4)$$

Функцію $f=f(t)$ потрібно підібрати таким чином, щоб, по-перше, можна було проінтегрувати вираз для знаходження координати $z=z(t)$, який отримуємо із (4):

$$z = \int \sqrt{f^2 - (x'^2 + y'^2)}dt, \qquad (5)$$

по друге, щоб можна було проінтегрувати вираз для знаходження довжини дуги згідно з формулою (4):

$$s = \int f(t)\,dt, \qquad (6)$$

і, по-третє, щоб можна було із знайденого виразу $s=s(t)$ знайти залежність $t=t(s)$, що дасть можливість виключити параметр t із параметричних рівнянь просторової кривої.

Розглянемо приклад для кривої (1). Задамо функцію $f = f(t)$ у найпростішому вигляді:

$$f = t. \qquad (7)$$

Вираз для знаходження аплікати (5) після спрощень у такому випадку набуває вигляду:

$$z = \int \sqrt{t^2 - R^2}dt = \\ = \frac{1}{2} \cdot \left[t\sqrt{t^2 - R^2} - R^2 \log\left(2\left(t + \sqrt{t^2 - R^2}\right)\right)\right]. \qquad (8)$$

За формулою (6) знаходимо вираз довжини дуги кривої:

$$s = \int t\,dt = t^2/2 \qquad \text{звідки} \qquad t = \sqrt{2s}. \qquad (9)$$

Підстановкою виразу *t=t(s)* із (9) у (1) та (8) отримаємо параметричні рівняння утвореної кривої у функції натурального параметра. Отримана крива та її параметричні рівняння наведені нижче в таблиці під другим номером.

Можна застосувати ще один підхід, коли змінна кривої розглядається як функція довжини дуги *s* цієї кривої. Наприклад, нехай горизонтальною проекцією просторової кривої є гіпербола, задана параметричними рівняннями:

$$x=\sinh\bigl(t(s)\bigr); \qquad y=\cosh\bigl(t(s)\bigr). \tag{10}$$

Знаходимо похідні рівнянь (11), диференціюючи по *s*:

$$x'=t'\cosh t; \qquad y'=t'\sinh t. \tag{11}$$

З урахуванням (11) вираз (2) запишеться:

$$t'^2\bigl(\cosh^2 t+\sinh^2 t\bigr)+z'^2=1. \tag{12}$$

Задамо функцію *t=t(s)* або *z=z(s)* так, щоб можна було знайти розв’язок рівняння (12). Наприклад, приймемо $t'=z'$. У такому випадку вираз (12) після спрощень буде мати вигляд:

$$t'\cdot\cosh t\cdot\sqrt{2}=1. \tag{13}$$

Розділимо змінні в диференціальному рівнянні (13) і отримаємо:

$$\cosh t\,dt=ds/\sqrt{2}\,, \qquad \text{звідки} \qquad t=\operatorname{arcsinh}\bigl(s/\sqrt{2}\bigr). \tag{14}$$

Підстановка виразу *t=t(s)* із (14) у (10), а також врахування того, що *z=t*, дадуть рівняння утвореної кривої у функції натурального параметра:

$$\begin{aligned} x&=s/\sqrt{2}\,;\\ y&=\sqrt{1+s^2/2}\,;\\ z&=\operatorname{arcsinh}\bigl(s/\sqrt{2}\bigr). \end{aligned} \tag{15}$$

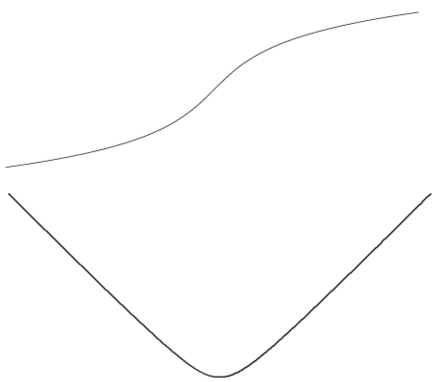


Рис. 1. Фронтальна і горизонтальна проекції просторової кривої (15).

Ортогональні проекції утвореної кривої зображено на рис. 1.

Розглянутий підхід особливо ефективний при конструюванні просторових кривих у функції натурального параметра на основі плоских кривих, для яких справедлива рівність: $\sqrt{x'^2+y'^2}=R-const.$ Окрім кола (1), у якого похідні рівнянь є тригонометричними функціями, така властивість притаманна ланцюговій лінії рівного опору, у якої похідні рівнянь є гіперболічними функціями. Параметричні рівняння такої лінії мають вигляд:

$$x=\ln\bigl(\cosh Rt\bigr); \qquad y=2\operatorname{Arctg}\left(\operatorname{Tanh}\frac{Rt}{2}\right). \tag{16}$$

Вважаючи змінну *t* функцією довжини дуги *s (t=t(s))*, приєднаємо до рівнянь (16) розшукувану залежність *z=z(s)*, яка разом із (16) опише просторову криву у функції натурального параметра. Їх похідні по параметру *s* запишуться:

$$x' = Rt'\mathrm{Tanh}(Rt); \qquad y' = Rt'\mathrm{Sech}(Rt); \qquad z' = z'(s). \qquad (17)$$

Підставивши вирази (17) у рівність (2), після спрощень отримаємо:

$$R^2 t'^2 + z'^2 = 1, \qquad \text{звідки} \qquad z = \int \sqrt{1 - R^2 t'^2}\, ds. \qquad (18)$$

Отримані вирази (18) справедливі і для колового циліндра з основою (1), якщо *t=t(s)*, і приєднаною залежністю *z=z(s)*.

Функцію *t=t(s)* потрібно підбирати таким чином, щоб можна було проінтегрувати вираз (18). Приєднавши до отриманого виразу *z=z(s)* параметричні рівняння (1) або (16), попередньо замінивши змінну *t* на змінну *t=t(s)*, ми отримаємо параметричні рівняння у функції довжини дуги на коловому циліндрі і на циліндрі з ланцюговою лінією рівного опору в основі відповідно, причому залежність *z=z(s)* буде для них спільною.

Розглянемо приклад. Функцію $t = t(s)$ задамо у вигляді $t = \sin s/R$, звідки $t' = \cos s/R$. Із другого виразу (18) маємо:

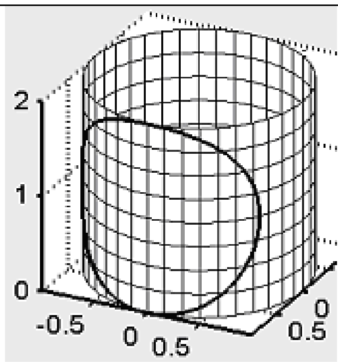
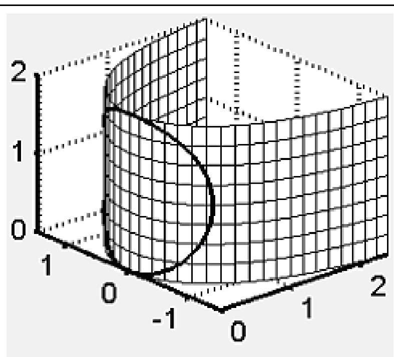
$$z = \int \sqrt{1 - \cos^2 s}\, ds = -\cos s. \qquad (19)$$

Параметричні рівняння кривих на циліндрах з основами (1) і (16) і спільною залежністю (19) наведено в таблиці під першим номером.

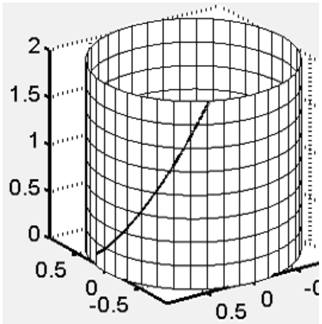
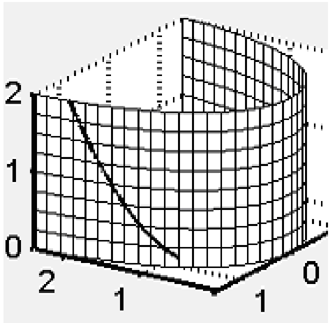
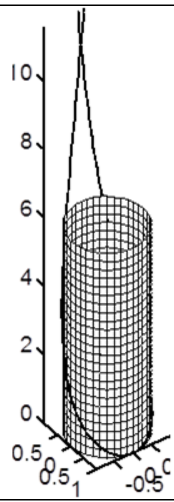
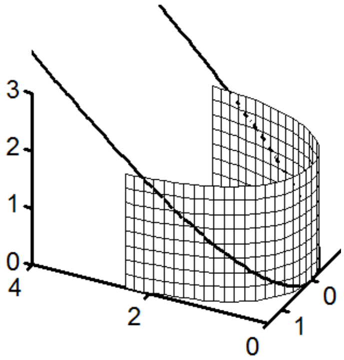
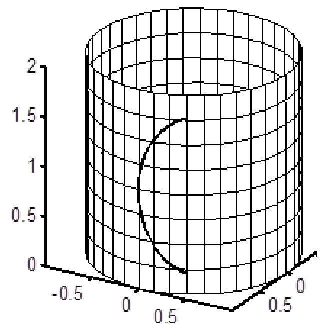
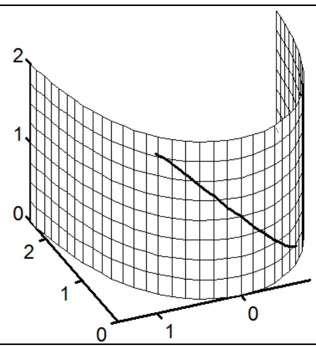
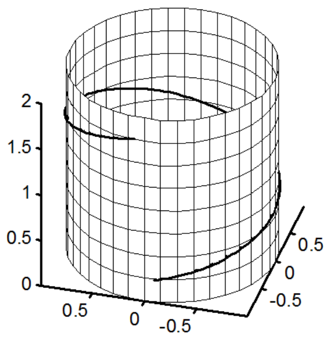
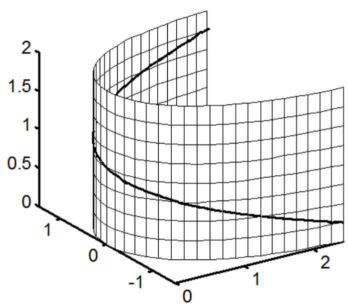
Якщо взяти функцію $t = \sqrt{2s}$, отриману в (9) при іншому підході, то знайдена залежність *z=z(s)* буде такою ж, як і у (8) при заміні *t* на $t = \sqrt{2s}$. Ця крива наведена в таблиці під другим номером. В цій же таблиці наведено і інші просторові криві з відповідними функціями *t=t(s)* і параметричними рівняннями у функції натурального параметра.

Таблиця

Просторові криві на поверхнях циліндрів та їх параметричні рівняння у функції довжини власної дуги

№ п/п	Функція *t=t(s)* та параметричні рівняння кривої на коловому циліндрі	Крива на поверхні колового циліндра	Крива на поверхні циліндра з ланцюговою лінією рівного опору в основі
1	2	3	4
1.	$t = \sin s/R$. $x = R\cos\dfrac{\sin s}{R}$; $y = R\sin\dfrac{\sin s}{R}$; $z = -\cos s$.		

Продовження таблиці

1	2	3	4
2.	$t=\sqrt{2s}$. $x=R\cos\sqrt{2s}$; $y=R\sin\sqrt{2s}$; $z=\sqrt{s\cdot\left(2s-R^2\right)/2}-$ $-\dfrac{R^2}{2}\log\left[2\left(\sqrt{2s}+\sqrt{2s-R^2}\right)\right]$.		
3.	$t=\operatorname{arcsinh} {}^{s}\!/_{R}$. $x=R\cos\left(\operatorname{arcsinh} {}^{s}\!/_{R}\right)$; $y=R\sin\left(\operatorname{arcsinh} {}^{s}\!/_{R}\right)$; $z=\sqrt{R^2+s^2}$.		
4.	$t={}^{s^2}\!/_{2R}$. $x=R\cos\left({}^{s^2}\!/_{2R}\right)$; $y=R\sin\left({}^{s^2}\!/_{2R}\right)$; $z=0{,}5\left(s\sqrt{1-s^2}+\arcsin s\right)$.		
5.	$t={}^{s}\!/_{\sqrt{R^2+b^2}}$. $x=R\cos\left({}^{s}\!/_{\sqrt{R^2+b^2}}\right)$; $y=R\sin\left({}^{s}\!/_{\sqrt{R^2+b^2}}\right)$; $z={}^{bs}\!/_{\sqrt{R^2+b^2}}$.		

Параметричні рівняння кривої на циліндрі з ланцюговою лінією рівного опору в основі в таблиці не наведені для уникнення дублювання. Їх легко отримати, оскільки залежність *z=z(s)* є спільною для обох циліндрів, а решту дві залежності отримаємо, якщо в рівняння (16) підставимо відповідну функцію *t=t(s)*. Наведеними в таблиці функціями *t=t(s)* не вичерпуються просторові криві на циліндрах які описуються параметричними рівняннями у функції натурального параметра. Наприклад, можна знайти криві для наступних функцій *t=t(s)*: $t=\frac{\sqrt{1-R^2}}{R}\ln\frac{\sqrt{1-R^2}+s^2-s}{\sqrt{1-R^2}}$; $t=2\mathrm{Arctg}\left[\tanh\left(\frac{s}{2R}\right)\right]$. Деякі криві, що мають вісь симетрії на фронтальній проекції (наприклад, №1 і №3 в таблиці), розташовані відповідно на циліндрі з ланцюговою лінією рівного опору в основі. Гвинтова лінія на коловому циліндрі (№5 в таблиці), яка є лінією укосу, на другому циліндрі теж є лінією укосу з таким же кутом підйому *α*: $\alpha=\mathrm{Arctg}\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\mathrm{Arctg}\frac{b}{R}$. Лінії укосу на циліндрах перетворюються в прямі на їх розгортках.

Висновки. На основі плоских кривих, описаних параметричними рівняннями у функції довільного параметра, можна конструювати просторові криві, задані параметричними рівняннями у функції натурального параметра, якщо плоску криву прийняти горизонтальною проекцією просторової. У статті сформульовано деякі шляхи такого конструювання та візуалізовано отримані криві з наведенням їх параметричних рівнянь у функції довжини власної дуги.

Перспективи подальших досліджень полягають у знаходженні кривих та їх параметричних рівнянь на розгортках обох циліндрів.

Література

1. *Войтюк Д.Г.* Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Збірник наукових праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва». – К.: НАУ, 2001. – Т. 10. – С. 74–78.

2. *Пилипака С.Ф.* Конструювання просторових кривих, заданих натуральними рівняннями, за допомогою чисельних методів / С.Ф. Пилипака, Т.В. Гнітецька // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Збірник наукових праць, присвячений 75-річчю від дня народження проф. Михайленка В.Є. – Харків: ХДАТОХ, 2002. – Вип. 1. – С. 24–26.

3. *Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М.* Побудова просторової кривої лінії за заданими натуральними рівняннями / С.Ф. Пилипака, В.М. Несвідомін // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: КГТУСА, 1996. – Вып. 59. – С. 106–107.

4. *Пилипака С.Ф.* Конструювання кривих у функції натурального параметра на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова, Т.П. Федорина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці /

Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип.4, т.55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 176–184.

5. *Пилипака С.Ф.* Геометрія кривих на поверхні псевдосфери, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова, Т.П. Федорина // «Наукові доповіді НУБіП 2012-7 (36).

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ В ФУНКЦИИ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ЗАДАНИЕМ ИХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

С.Ф. Пилипака, Т.Н. Захарова

Сформулированы два пути поиска пространственных кривых в функции натурального параметра на основе различных плоских кривых, заданных параметрическими уравнениями в функции произвольного параметра, как горизонтальных проекций пространственных. Для полученных кривых приведены натуральные и параметрические уравнения в функции длины собственной дуги. Визуализированы полученные результаты.

CONSTRUCTING OF SPATIAL CURVES IN THE FUNCTION OF NATURAL PARAMETER BY ITS HORIZONTAL PROJECTION

S. Pylypaka, T. Zakharova

Two ways of searching of spatial curves in the function of natural parameter on the basis of different flat curves as horizontal projection of spatial, set by the parametrical equations in the function of arbitrary parameter, were formulated in the article. Natural and parametrical equations in the function of length of own arc were resulted. Visualization of the got curves was carried out.