

К ВОПРОСУ СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ВАРИАТИВНОГО ФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ УГЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

*Мелитопольская школа прикладной геометрии
Мелитопольский государственный педагогический университет
им. Богдана Хмельницкого*

В статье рассматривается вопрос устойчивости и сходимости при использовании метода сгущения на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

Постановка проблемы. При использовании метода сгущения на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров [1], в результате наложения различных дополнительных условий на соотношение углов смежности, получаем разностные схемы второго порядка. Однако, как известно [2-5], при большом числе уравнений прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений, за исключением метода прогонки и итерационных методов, становятся труднореализуемыми на ЭВМ, прежде всего из-за сложности хранения и обработки матриц большой размерности. Поэтому, для решения разностных схем второго порядка в методе вариативного формирования разностных схем угловых параметров использовался метод прогонки. Однако, данному методу решения, так же как и всем прямым методам, присуща возможность лавинообразного накопления ошибок округления. Для его успешного применения необходимо, чтобы прогонка была корректной (в процессе вычислений не возникало ситуаций деления на ноль) и устойчивой (при больших размерностях систем не должно быть роста погрешностей округлений).

Анализ последних исследований. В исследованиях, относительно использования метода вариативного формирования разностных схем угловых параметров, для сгущения дискретно представленных кривых одним из нерассмотренных в публикациях остался вопрос использования метода прогонки для решения систем трехдиагональных матриц. Данный вопрос является актуальным, поскольку необходимо обосновать корректность полученных результатов.

Формулирование целей статьи. Исследовать вопрос устойчивости и сходимости при использовании метода сгущения на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

Основная часть. В предыдущих исследованиях [1] была предложена следующая вариативная схема сгущения на основе угловых параметров:

$$(1 - \eta_{i-1})\gamma_{i-0.5}^1 + \gamma_i^1 + \eta_i\gamma_{i+0.5}^1 = \gamma_i^0, \quad i = \overline{1; n-1}, \quad (1)$$

где γ_i^0, γ_i^l – углы смежности до и после первого шага сгущения (индекс вверху) в i -м узле ДПК;

$\gamma_{i+0.5}^l$ – угол смежности в точке сгущения $i + 0.5$;

n – число точек исходного точечного ряда;

$\eta \in [0;1]$ – коэффициент соотношения угловых параметров;

$$\eta_i = \frac{\gamma_i^0}{\gamma_i^0 + \gamma_{i+1}^0}, \quad i = \overline{0; n-1}. \quad (2)$$

На основании вариативной схемы (1) в работе [1] был предложен алгоритм метода сгущения на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров, который заключается в следующем:

1. Определяются геометрические характеристики исходной ДПК.
2. Определяется конфигурация исходной ДПК (выпуклая, вогнутая, содержит прямолинейные или переходные участки) на основании её дискретных геометрических характеристик (см. п. 1).
3. Определяются значения коэффициентов η_i .
4. Рассчитываются углы смежности $\gamma_i^l, i = \overline{1; n-1}$ и $\gamma_{i-0.5}^l, i = \overline{1; n}$

звеньев сгущенной ДПК.

5. Рассчитываются геометрические характеристики сгущенной ДПК.

6. Критерием окончания сгущения является достижение следующего условия на k -м шаге сгущения

$$\max |\gamma_{i+0.5}^l| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1; n-1},$$

где $\varepsilon \geq 0$ – как угодно малое наперед заданное число.

Пункт 4 данного алгоритма позволяет рассчитывать углы смежности в точках сгущения в результате решения разностных схем. В работе [1] для вычисления углов смежности была предложена следующая разностная схема второго порядка:

$$\begin{aligned} (1 - \eta_{i-1})\gamma_{i-0.5}^l + \gamma_i^l + \eta_i\gamma_{i+0.5}^l &= \gamma_i^0, & i = \overline{1; n-1} \\ \gamma_i^l + 2\gamma_{i+0.5}^l + \gamma_{i+1}^l &= \gamma_i^0 + \gamma_{i+1}^0, & i = \overline{1; n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения разностной схемы (3) использовался метод прогонки. Как известно [5], метод прогонки является модификацией метода Гаусса для систем с трёхдиагональными матрицами, ненулевые элементы которых расположены только на главной диагонали и на двух диагоналях, примыкающих к ней

$$A = \begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_3 & -b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_m & -b_m \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для матрицы (4) исходную систему уравнений можно представить в виде:

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (a_1 = c_m = 0). \quad (5)$$

где a_i, b_i, c_i – элементы трёхдиагональной матрицы.

Решение трёхдиагональной системы определяется формулами прямого хода:

$$\delta_i = \frac{a_i \delta_{i-1} - d_i}{b_i - a_i \gamma_{i-1}}, \quad \nu_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \gamma_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (a_1 = 0); \quad (6)$$

и обратного хода

$$x_i = \delta_i + \nu_i x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Неустойчивость метода прогонки может быть обусловлена малостью по абсолютному значению выражения $b_i - a_i \nu_{i-1}$, стоящего в знаменателях формул прямого хода.

Достаточными условиями корректности и устойчивости метода прогонки являются условие преобладания диагональных элементов:

$$\begin{cases} a_i \neq 0, & 2 \leq i \leq m; \\ c_i \neq 0, & 1 \leq i \leq m-1; \\ |b_i| \geq |a_i| + |c_i|, & 1 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (8)$$

Причём в последнем выражении хотя бы для одного уравнения неравенство должно быть строгим.

Запишем разностную схему второго порядка (3) в виде матрицы (4):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1-\eta_1 & 1 & \eta_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\eta_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\eta_{n-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда, условие преобладания диагональных элементов (8) применительно к разностной схеме (3) примет следующий вид:

– для узла:

$$(1 - \eta_{i-1}) + \eta_i \geq 1, \quad i = \overline{1; n} \quad (10)$$

;

– для дополнительного уравнения:

$$1 + 1 = 2, \quad i = \overline{1; n} \quad (11)$$

Для дополнительного уравнения, условие преобладания диагональных элементов превращается в тождество. Для узла, выражения (8) с учётом (2) и (9) примет вид:

$$\left(1 - \frac{\gamma_{i-1}^0}{\gamma_{i-1}^0 + \gamma_i^0} + \frac{\gamma_i^0}{\gamma_i^0 + \gamma_{i+1}^0} \right) \geq 1, \quad i = \overline{1; n}$$

$$\frac{\gamma_{i-1}^0 \gamma_i^0 + (\gamma_i^0)^2 + \gamma_i^0 \gamma_{i+1}^0 + (\gamma_{i+1}^0)^2}{\gamma_{i-1}^0 \gamma_i^0 + (\gamma_i^0)^2 + \gamma_i^0 \gamma_{i+1}^0 + \gamma_{i-1}^0 \gamma_{i+1}^0} \geq 1, \quad i = \overline{1; n} \quad (12)$$

После преобразования выражения (12) получаем условие преобладания диагональных элементов для узла

$$(\gamma_i^0)^2 \geq \gamma_{i-1}^0 \gamma_{i+1}^0, \text{ или } \gamma_i^0 \geq \sqrt{\gamma_{i-1}^0 \gamma_{i+1}^0}, \quad i = \overline{1; n} \quad (13)$$

Условие (13) представляет собой не что иное, как геометрическую прогрессию. Поскольку, какой бы длинной не была геометрическая прогрессия, сумма ее членов не больше какого-то определенного числа. Оно и называется суммой геометрической прогрессии, определяемой из выражения:

$$S_n = \frac{\gamma_n q - \gamma_1}{q - 1} = \frac{\gamma_1 (q^n - 1)}{q - 1}, \quad (14)$$

где S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии;

q – знаменатель геометрической прогрессии.

Однако, не любая геометрическая прогрессия имеет такую предельную сумму. Она может быть только у такой прогрессии, знаменатель которой – дробное число меньше 1 [6].

Подведя итог всему вышесказанному, рассмотрим следующий тестовый пример (рис.1), подтверждающий устойчивость и сходимость метода сгущения на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

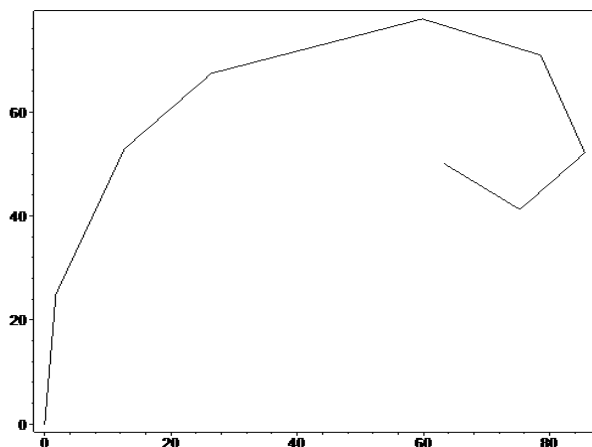


Рис.1 – Тестовый пример.

Таблица 1.

	x	y	γ_i
0	0	0	-0,23
1	1,7684	24,9374	-0,30
2	12,6392	52,8985	-0,39
3	26,4291	67,3842	-0,507
4	59,8347	77,8277	-0,6591
5	78,5800	70,8553	-0,85683
6	85,5855	52,1224	-1,113979
7	75,2951	41,2087	-1,4480427
8	63,2036	50,0853	-1,88245551

Координаты точек тестовой ДПК, а также значения углов смежности приведены в таблице 1. Из таблицы видно, что значение углов смежности γ_i , $i = \overline{1;8}$ изменяются согласно геометрической прогрессии со знаменателем $q=1,3$. Следовательно, условие (12) соблюдено.

На рис. 2 приведен результат сгущения тестовой ДПК, а так же представлены многоугольники выбора управляющих параметров для каждого из четырех шагов сгущения.

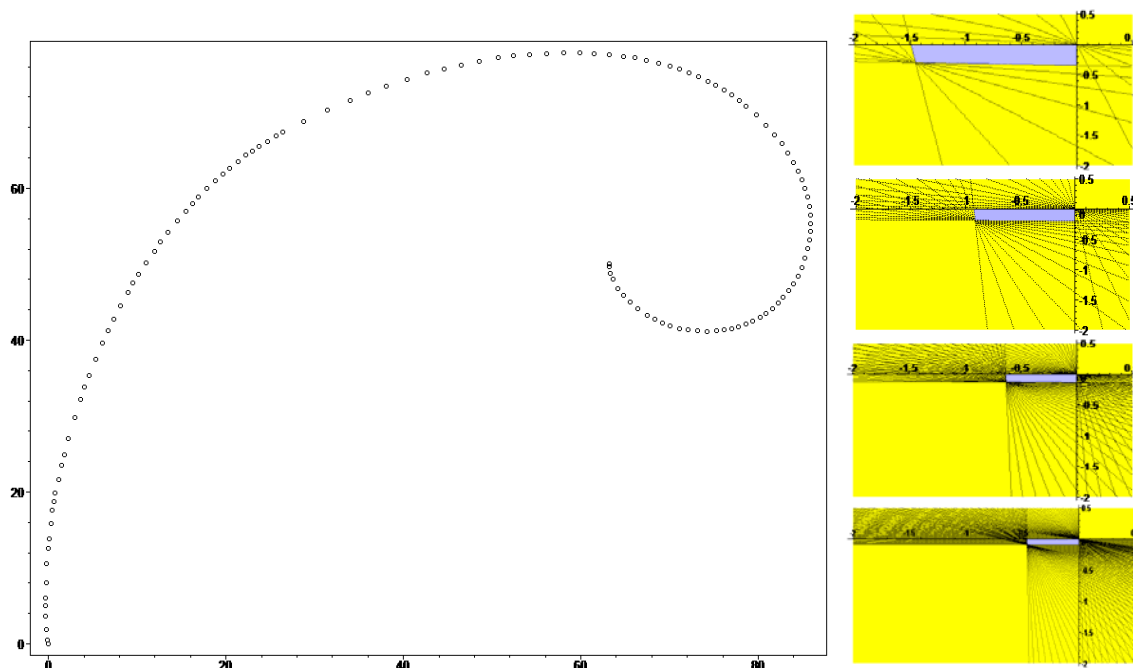


Рис. 2 – Результат сгущения тестовой ДПК и многоугольники выбора управляющих параметров для 4 шагов сгущения.

В приведенном тестовом примере знаменатель геометрической прогрессии равен $q=1,3$, следовательно, знаменатель в выражении (14) меньше нуля и геометрическая прогрессия имеет сумму.

Кроме того, из рис.2 видно, что по мере увеличения количества шагов сгущения, многоугольник выбора управляющих параметров уменьшается, что косвенно так же является свидетельством сходимости метода на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

Выводы. В работе рассмотрен вопрос корректности использования метода прогонки для решения систем трехдиагональных матриц, а также вопросы устойчивости и сходимости при использовании метода сгущения на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров. Условие преобладания диагональных элементов (13) является достаточным, однако оно не является необходимым, поскольку в практических расчётах прогонка оказывается устойчивой даже при нарушении этого условия [5]. Полученные в работе результаты позволяют обосновать корректность использования метода на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров для сгущения ДПК.

Литература

1. *Спиринцев Д.В.* Дискретная интерполяция на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров: дисс. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / *Д.В. Спиринцев*. – Мелітополь, ТГАТУ, 2010. – 214 с.
2. *Ильин В.П.* Трёхдиагональные матрицы и их приложения. / В.П. Ильин, Ю.И. Кузнецов // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, –1985.–208 с.
3. *Вержбитский В.М.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения./В.М. Вержбитский // М.: Высшая школа,– 2000.– 266 с.
4. *Годунов С.К.* Разностные схемы (введение в теорию)./ С.К. Годунов, В.С. Рябенкий // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы,–1977.–440 с.
5. *Ильин В.П.* Трёхдиагональные матрицы и их приложения/ В.П. Ильин, Ю.И. Кузнецов // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, –1985.–208 с.
6. *Корн. Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров/ Г. Корн, Т. Корн // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, –1970.–720 с.

**К ПИТАННЮ ЗБІЖНОСТІ І СТІЙКОСТІ МЕТОДА
ВАРІАТИВНОГО ФОРМУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ КУТОВИХ
ПАРАМЕТРІВ**

А.В. Найдюш, Д.В. Спиринцев

У статті розглядається питання стійкості і збіжності при використанні методу згущення на основі варіативного формування різницьових схем кутових параметрів.

**THE QUESTION OF CONVERGENCE AND STABILITY IN THE
METHOD OF FORMING VARIATIVNOJ DIFFERENCE SCHEMES
ANGULAR PARAMETERS**

A. Naydysh, D. Spirintsev

The article considers the issue of stability and convergence when using the method of condensation forming on the basis of the difference schemes of variable angular parameters.