УДК 514.18

О.Л. Підгорний, д.т.н., проф.,
А.В. Найдиш, д.т.н., проф.,
Є.В. Конопацький, к.т.н., доц.,
В.М. Верещага, д.т.н., проф.,
І.Г. Балюба, д.т.н., проф.,

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ МЕТОДУ ДВОХ ЗОБРАЖЕНЬ ПІДГОРНОГО ЗАСОБАМИ ТОЧКОВОГО ЧИСЛЕННЯ БАЛЮБИ-НАЙДИША

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Донбаська національна академія будівництва і архітектури, Україна

У статті запропоновано аналітичний опис загального випадку методу двох зображень Підгорного засобами точкового числення Балюби-Найдиша.

Постановка проблеми. Метод двох зображень Підгорного встановлює взаємно однозначну відповідність між об’єктом, який розташовано у просторі, і його проекціями на площину, має велике теоретичне значення. Цей метод може мати широке практичне впровадження, але він не адаптований для використання на практиці з урахуванням сучасних можливостей обчислювальної техніки. З іншого боку, апарат точкового числення Балюби-Найдиша (БН-числення) дозволяє аналітично формалізувати геометричні алгоритми, ставлячи у відповідність кожній геометричний операції аналітичну залежність. Але цей апарат дуже молодий і потребує подальшого розвитку у теоретичному і прикладному плані. Тому задача формалізації геометричної моделі методу двох зображень Підгорного засобами БН-числення буде актуальною і корисною для обох вище згаданих наукових напрямків, а дослідження на їх основі – перспективним науковим напрямком.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З точки зору БН-числення, метод двох зображень Підгорного [1-3] складається із елементарних геометричних операцій, таких як перетин прямої з площиною, тобто проецюючого променя з площиною проекцій [4-6]. Об’єднання геометричних можливостей методу двох зображень Підгорного і аналітичних можливостей математичного апарату БН-числення дозволить значно розширити комп’ютерне застосування методу двох зображень, дослідити більш детально його окремі випадки і отримати програмну реалізацію цього методу на ПЕОМ. У запропонованій постановці, що пропонує їх поєднати, проблема розглядається вперше.

Формулювання цілей та завдання статті. Ціллю даної статті є розроблення аналітичного опису загального випадку методу двох зображень Підгорного у точковому численні Балюби-Найдиша.

Основна частина. У загальному випадку, для методу двох зображень Підгорного, центри проеціювання $S, T, H -$ не колінеарні (рис. 1). Вихідними даними методу є:

$\tau, \sigma -$ площини проекцій.

$\Pi -$ площина кресленика.

$T, S -$ центри проеціювання на τ і σ.

$H -$ центр перепроеціювання на Π.

$A -$довільна точка, розташована у просторі.

Геометрична сутність методу двох зображень Підгорного полягає у тому, що точка A двічі проецюється за допомогою центрального проеціювання. Точки A_T і A_S – це проекції точки A, спочатку із центрів проеціювання T і S відповідно на площини τ та σ, а потім із центру перепроеціювання H на площину Π. Центри проеціювання T і S також двічі проецюється за допомогою центрального проеціювання. S_T і T_S – це проекції точок T і S відповідно із центрів проеціювання S і T спочатку на площини τ та σ, а потім із центру перепроеціювання H на площину Π.

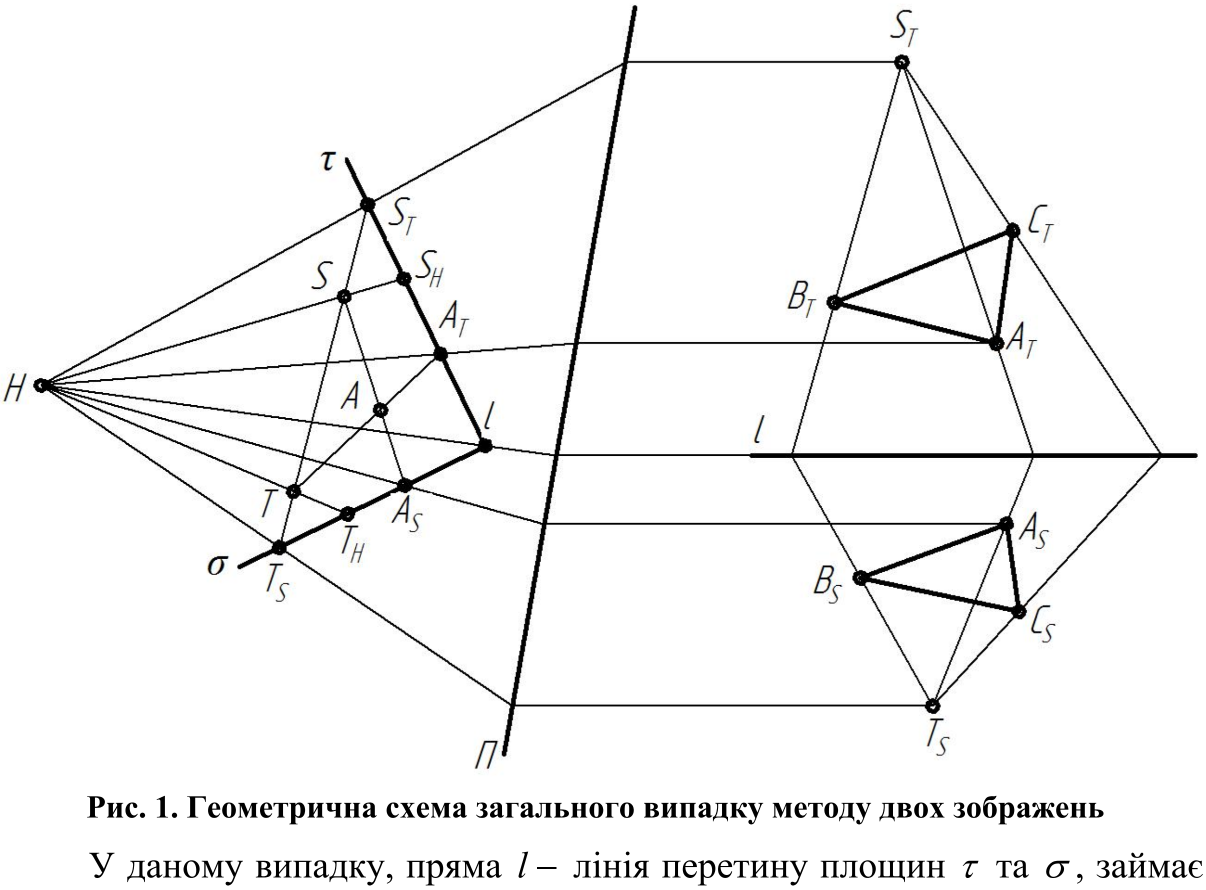

Рис. 1. Геометрична схема загального випадку методу двох зображень

У даному випадку, пряма $l -$ лінія перетину площин τ та σ, займає паралельне положення по відношенню до площини Π.

Точки B і C також проецюються двічі аналогічно точці A. Таким чином, метод двох зображень Підгорного визначає геометричний образ, у розглянутому випадку – площина ABC.

Для формалізованого, засобами точкового числення Балюби-Найдиша, опису методу представимо розглянуту геометричну схему (рис. 1) у 3-вимірному просторі (рис. 2), на якому DB – вісь l перетину площин проекцій $\sigma = DBA$ і $\tau = DBC$. Центри проеціювання S, T, H. $DB\Pi$ – площина кресленика проходить через вісь l (не втрачається загальність, але спрощується формалізація). Точка M двічі центрально проеціюється. Мета задачі – при заданих точках A, B, C, D, Π, H, S, T і наявною мінливою точкою $M \notin ST$ – лінії центрів, необхідно визначити її проекції M_T, M_S та кресленик у двох проекціях M_{TH} та M_{SH}.

На лінії центрів ST довільно обираємо точки A і C, які разом із довільними точками D і B, що знаходяться на осі проекцій, визначають симплекс $DABC$ простору, в якому відбувається побудова геометричної моделі двох центральних проекцій. У заданому симплексі обираємо поточну точку будь-якого геометричного об'єкту, що визначається точковим рівнянням M:

$$M = (A - D)p + (B - D)q + (C - D)r + D. \tag{1}$$

Відносно точок A, C і D, вихідного симплексу $DABC$, зафіксуємо центри первинного проеціювання S і T, які повинні знаходитись на прямій AC:

$$S = (A - D)\overline{p}_S + (C - D)r_S + D,\ T = (A - D)\overline{p}_T + (C - D)r_T + D, \tag{2}$$

де відношення параметрів $r_S = p_S, r_T = p_T$ забезпечує належність точок S і T прямій AC.

Зафіксуємо у просторі, відносно симплексу $DABC$, центр вторинного центрального проеціювання:

$$H = (A - D)p_H + (B - D)q_H + (C - D)r_H + D. \tag{3}$$

Без втрати загальності викладу, площину вторинного проеціювання (площину кресленика) $DB\Pi$, визначимо віссю DB і довільною точкою Π:

$$\Pi = (A - D)p_\Pi + (B - D)q_\Pi + (C - D)r_\Pi + D. \tag{4}$$

Моделюємо точково загальний випадок методу двох зображень Підгорного. Проецюючий промінь TM:

$$N = (M - T)\lambda + T = (A - D)(p\lambda - \overline{p}_T\lambda + \overline{p}_T) +$$
$$+(B - D)q\lambda + (C - D)(r\lambda - r_T\lambda + r_T) + D.$$

Визначаємо первинну проекцію як точку перетину проеціючого променя TM і однієї з площин проекцій DBC ($M_T = TM \cap DBC$):

$$\begin{vmatrix} p\lambda - \overline{p}_T\lambda + \overline{p}_T & q\lambda & r\lambda - r_T\lambda + r_T & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = p\lambda - \overline{p}_T\lambda + \overline{p}_T = 0 \to \lambda = \frac{\overline{p}_T}{\overline{p}_T - p},$$

де $\overline{p}_T = 1 - p_T$.

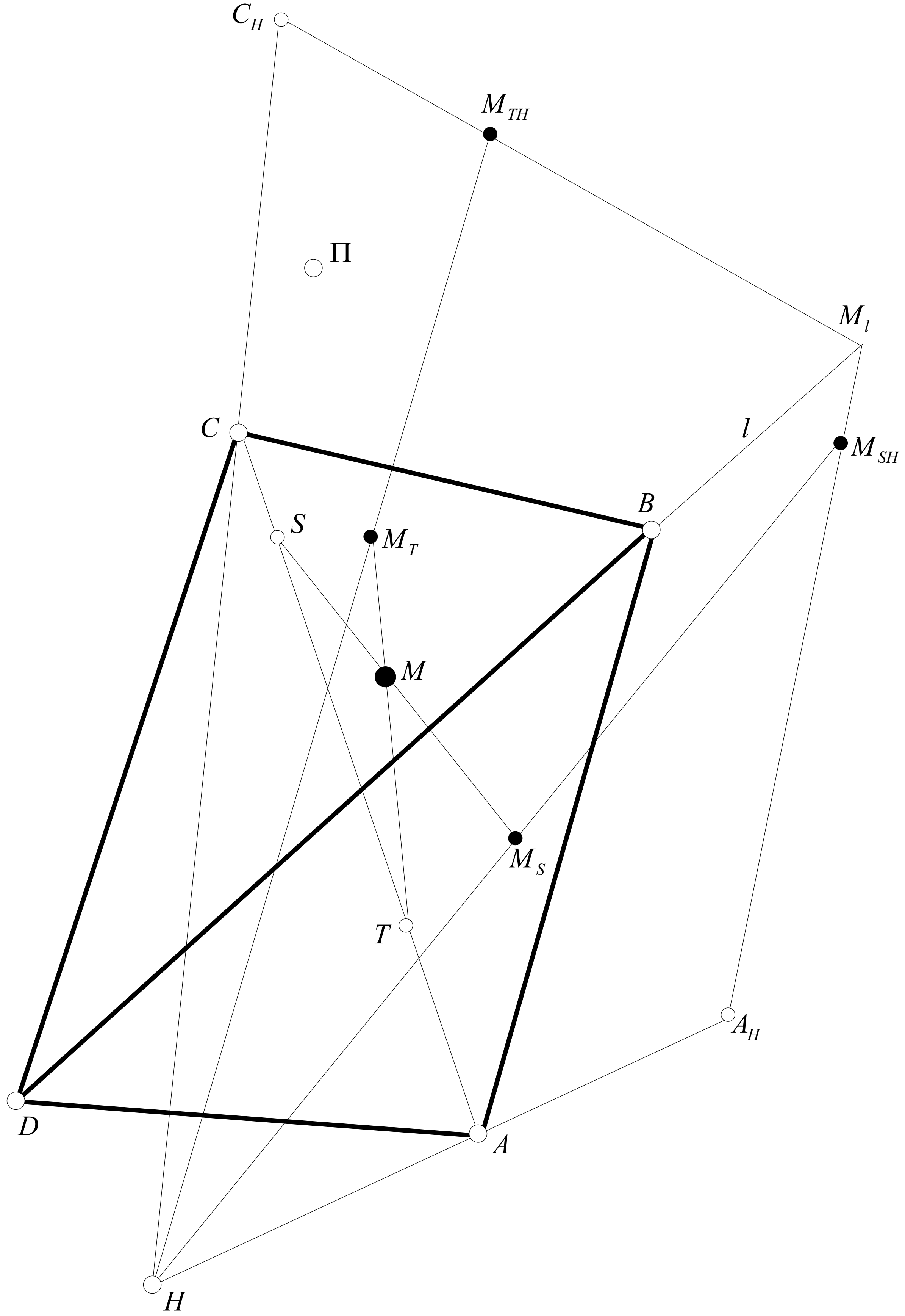

Рис. 2. Геометрична схема методу двох проекцій для формалізації засобами БН-числення

Допоміжний параметр $\lambda = \dfrac{NT}{MT}$, де точка N – поточна точка проецюючого променя з центру T, що проходить через точку M (на рис. 2 точка N не показана), визначаємо з умови, що об'єм піраміди $NDBC$ дорівнює нулю і, у даному випадку, мінлива точка N стане шуканою точкою – M_T, тобто $N \equiv M_T$.

Підставляючи отриманий вираз λ, остаточно знайдемо точкове рівняння, що визначає положення M_T:

$$M_T = (B-D)\frac{q\overline{p}_T}{\overline{p}_T - p} + (C-D)\frac{r\overline{p}_T - r_T p}{\overline{p}_T - p} + D. \qquad (5)$$

Аналогічно визначаємо другу первинну проекцію $M_S = SM \cap DAB$:

$$M_S = (M-S)\lambda + S = (A-D)\frac{r_S p - r\overline{p}_S}{r_S - r} + (B-D)\frac{q r_S}{r_S - r} + D. \qquad (6)$$

Визначемо проекції вершин A і C симплексу $DABC$ на площині кресленика ΠDB:

$A_H = HA \cap \Pi BD;$

$A_H = (H-A)\lambda + A = (A-D)(p_H\lambda - \lambda + 1) + (B-D)q_H\lambda + (C-D)r_H\lambda + D;$

$$\begin{vmatrix} p_H\lambda - \lambda + 1 & q_H\lambda & r_H\lambda & 1 \\ p_\Pi & q_\Pi & r_\Pi & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = p_H r_\Pi \lambda - r_\Pi \lambda + r_\Pi - p_\Pi r_H \lambda = 0.$$

Звідси визначаємо: $\lambda = \dfrac{r_\Pi}{r_H p_\Pi + r_\Pi - p_H r_\Pi}$,

$$A_H = (H-A)\lambda + A = \frac{(A-D)r_H p_\Pi + (B-D)r_\Pi q_H + (C-D)r_\Pi r_H}{r_H p_\Pi + r_\Pi - p_H r_\Pi} + D. \qquad (7)$$

Аналогічно визначаємо:

$C_H = HC \cap \Pi BD;$

$C_H = (A-D)p_H\lambda + (B-D)q_H\lambda + (C-D)(r_H\lambda - \lambda + 1) + D;$

$$\begin{vmatrix} p_H\lambda & q_H\lambda & r_H\lambda - \lambda + 1 & 1 \\ p_\Pi & q_\Pi & r_\Pi & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = p_H r_\Pi \lambda - r_H p_\Pi \lambda + \lambda p_\Pi - p_\Pi = 0;$$

$$\lambda = \frac{p_\Pi}{p_H r_\Pi - r_H p_\Pi + p_\Pi};$$

$$C_H = \frac{(A-D)p_H p_\Pi + (B-D)q_H p_\Pi + (C-D)p_H r_\Pi}{p_H r_\Pi - r_H p_\Pi + p_\Pi} + D. \qquad (8)$$

Переходимо до визначення кресленика точки $M(M_{TH}, M_{SH})$. Одна з проекцій M_{TM} є точкою перетину проецюючого променя HM_T і площини кресленика ПBD ($M_{TH} = HM_T \cap ПBD$):

$$M_{TH} = H\overline{\lambda} + M_T\lambda =$$

$$= (A-D)p_H\overline{\lambda} + (B-D)(q_H\overline{\lambda} + \frac{q\overline{p}_T\lambda}{\overline{p}_T - p}) + (C-D)(r_H\overline{\lambda} + \frac{r\overline{p}_T - r_T p}{\overline{p}_T - p}\lambda + D =$$

$$= (A-D)p_H\overline{\lambda} + (B-D)\frac{(q\overline{p}_T + pq_H - \overline{p}_T q_H)\lambda + \overline{p}_T q_H - pq_H}{\overline{p}_T - p} +$$

$$+(C-D)\frac{(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)\lambda + \overline{p}_T r_H - pr_H}{\overline{p}_T - p} + D.$$

$$\lambda\left[(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)p_П + p_H r_П(\overline{p}_T - p)\right] = p_H r_П(\overline{p}_T - p) - \overline{p}_T r_H p_П + pr_H p_П \to$$

$$\to \lambda = \frac{(p_H r_П - r_H p_П)(\overline{p}_T - p)}{(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)p_П + p_H r_П(\overline{p}_T - p)}.$$

$$\overline{\lambda} = \frac{(r\overline{p}_T - r_T p)p_П}{(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)p_П + p_H r_П(\overline{p}_T - p)}.$$

Підставляючи значення λ, отримаємо одну із вторинних проекцій точки M:

$$M_{TH} = (A-D)p_H\overline{\lambda} + (B-D)\frac{(q\overline{p}_T + pq_H - \overline{p}_T q_H)\lambda + \overline{p}_T q_H - pq_H}{\overline{p}_T - p} +$$

$$+(C-D)\frac{(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)\lambda + \overline{p}_T r_H - pr_H}{\overline{p}_T - p} + D = \qquad (9)$$

$$= (A-D)\frac{p_H p_П(r\overline{p}_T - r_T p)}{(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)p_П + p_H r_П(\overline{p}_T - p)} +$$

$$+(B-D)\left[\frac{(q\overline{p}_T + pq_H - \overline{p}_T q_H)(p_H r_П\overline{p}_T - p_H r_П p - \overline{p}_T r_H p_П + pr_H p_П)}{\left[(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)p_П + p_H r_П(\overline{p}_T - p)\right](\overline{p}_T - p)} + \frac{\overline{p}_T q_H - pq_H}{(\overline{p}_T - p)}\right] +$$

$$+(C-D)\left[\frac{(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)(p_H r_П\overline{p}_T - p_H r_П p - \overline{p}_T r_H p_П + pr_H p_П)}{\left[(r\overline{p}_T - r_T p - \overline{p}_T r_H + pr_H)p_П + p_H r_П(\overline{p}_T - p)\right](\overline{p}_T - p)} + \frac{\overline{p}_T r_H - pr_H}{\overline{p}_T - p}\right] + D.$$

Аналогічно отримаємо другу вторинну проекцію точки M:

$$M_{SH} = HM_S \cap ПBD$$

$$M_{SH} = H\overline{\lambda} + M_S\lambda = (A-D)(p_H\overline{\lambda} + \frac{(r_S p - r\overline{p}_S)\lambda}{r_S - r}) + (B-D)(q_H\overline{\lambda} + \frac{r_S q\lambda}{r_S - r}) + (C-D)r_H\overline{\lambda} + D.$$

$$\begin{vmatrix} (p_H\overline{\lambda} + \frac{(r_S p - r\overline{p}_S)\lambda}{r_S - r}) & (q_H\overline{\lambda} + \frac{r_S q\lambda}{r_S - r}) & r_H\overline{\lambda} & 1 \\ p_П & q_П & r_П & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (q_H p_П\overline{\lambda} + \frac{r_S q p_П\lambda}{r_S - r}).$$

$$\lambda = \frac{(q_H p_\Pi - p_H r_\Pi)(r_S - r)}{r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi + (q_H p_\Pi - p_H r_\Pi)(r_S - r)};$$

$$\overline{\lambda} = \frac{r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi}{r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi + (q_H p_\Pi - p_H r_\Pi)(r_S - r)}.$$

Підставляючи значення λ, отримаємо другу вторинну проекцію точки M:

$$\begin{aligned} M_{SH} = (A - D)\frac{(r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi) p_H + (q_H p_\Pi - p_H r_\Pi)(r_S p - r\overline{p}_S)}{r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi + (q_H p_\Pi - p_H r_\Pi)(r_S - r)} + \\ +(B - D)\frac{(r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi) q_H + (q_H p_\Pi - p_H r_\Pi) r_S q}{r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi + (q_H p_\Pi - p_H r_\Pi)(r_S - r)} + \\ +(C - D)\frac{(r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi) r_H}{r_S r_\Pi p - r r_\Pi \overline{p}_S - r_S q p_\Pi + (q_H p_\Pi - p_H r_\Pi)(r_S - r)} + D. \end{aligned} \qquad (10)$$

На площині кресленика ΠBD проекції точки M_{TH} і M_{SH} повинні належати одній лінії зв'язку. Для виконання цієї умови при проеціюванні точки M необхідно, щоб центри проеціювання S, T знаходились у площині AMC. Для довільної точки M простору достатньо, щоб ці центри розташовувались на прямій AC, а ця умова була поставлена раніше, при побудові геометричної схеми розглянутої задачі.

Висновки. Дана стаття є дослідженням, яке вперше показує можливості застосування БН-числення для формалізації синтетичних описів, геометричних схем і моделей не використовуючи методи аналітичної геометрії, побудованої на використанні методу координат, введеного Декартом. Запропонований у цій статті опис методу двох зображень Підгорного з використання математичного апарату точкового числення Балюби-Найдиша є першою, на наш погляд вдалою, спробою формалізації графічних схем і моделей без використання традиційних методів аналітичної геометрії.

Подальші дослідження у цьому напрямку, відносно багатої спадщини синтетичних методів геометрії та графічних схем і моделей, дозволять створювати формалізовані геометричні моделі, які є вільними від розв'язку, як правило, нелінійних рівнянь або нерівностей і їх систем, що надасть змогу уникнути розв'язків у радикалах, які, здебільшого, потребують використання обчислювальних методів, що призводять до збільшення похибки розв'язку.

Точкові рівняння, отримані у даному дослідженні, є громіздкими, але, при цьому, під час програмної реалізації вони потребують досить малої витрати часу.

Можна зробити висновки, що формалізація синтетичних методів геометрії та графічних схем і моделей засобами точкового числення Балюби-Найдиша є новим перспективним напрямком прикладної геометрії, який у подальшому планується до розробки у Мелітопольській школі прикладної геометрії.

Література

1. *Подгорный А.Л.* О тождественных образах в системе двух изображений / А.Л. Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып.4. – К.: Будівельник, 1966.- С. 11-17

2. *Подгорный А.Л.* О поверхностях тождественных линий / А.Л. Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып.5. – К.: Будівельник, 1967

3. *Подгорный А.Л.* О системах проекций с неколинейными центрами / А.Л. Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып.6. – К.: Будівельник, 1968

4. *Балюба І.Г.* Основи математичного апарату точкового числення / Балюба І.Г., Поліщук В.І., Малютіна Т.П. Праці // Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 29. – Мелітополь: ТДАТА, 2005.– С.22-30.

5. *Балюба И.Г.* Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: диссертация на соискание научной степени доктора технических наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.

6. *Найдыш В.М.* Алгебра БН-исчисления / Найдыш В.М., Балюба И.Г., Верещага В.М.// Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.210-215.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕТОДА ДВУХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПОДГОРНОГО СРЕДСТВАМИ ТОЧЕЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ БАЛЮБЫ-НАЙДЫША

А.Л. Подгорный, А.В. Найдыш, Е.В. Конопацкий, В.М. Верещага, И.Г.Балюба

В статье предлагается аналитическое описание общего случая метода двух изображений Подгорного средствами точечного исчисления Балюбы-Найдыша.

FORMALIZATION OF GEOMETRIC MODELS BY METHOD OF TWO PICTURES USING A DOT CALCULATING BALYUBY-NAYDYSHA

O. Pidgorniy, A. Naydish, E. Konopatsky, V. Vereshaga, I. Baluba

This article proposed an analytical description the general case of the method of two pictures using a dot calculating Balyuby-Naydysha.