УДК 515.2 **С.І. Пустюльга**, д.т.н.,
В.Р. Самостян, к.т.н.,
А.А. Хомич

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗРІВНОВАЖЕНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ СІТОК, З НЕРІВНОМІРНИМ КРОКОМ ВУЗЛІВ, СУПЕРПОЗИЦІЄЮ ПОДВІЙНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Луцький національний технічний університет, Україна

У роботі досліджено процеси формування зрівноважених дискретно представлених двовимірних образів з нерівномірним кроком вузлів за допомогою суперпозиції подвійних числових послідовностей із абсолютним забезпеченням заданих крайових умов. Запропонована методика дає можливість зняти проблеми розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь рівноваги формування моделей з нерівномірними кроком вузлів статико-геометричним методом, проблеми згущення сіток до досягнення заданої точності, забезпечує швидкий перехід від дискретних моделей двовимірних образів до їх неперервних аналогів.

Постановка проблеми. На сучасному етапі разом із суттєвим ускладненням зовнішніх форм проектованих об'єктів в архітектурі, будівництві, машинобудуванні, корабле- та автомобілебудуванні стоїть завдання скорочення термінів розробки та підготовки конструкторської документації для виробництва.

Проектування складної геометричної форми будь-якого технічного об'єкту потребує від конструкторів творчого підходу, аналізу та обробки значної кількості можливих варіантів і вибору оптимального за визначеними критеріями, а тому, як правило, цей процес погано піддається формалізації.

Відтак, розробка нових та удосконалення існуючих методик та уніфікованих алгоритмів формування складних за геометрією криволінійних форм за заданими вихідними вимогами, які давали б можливість швидко корегувати процеси моделювання на початкових стадіях розробки просторової форми, є актуальними.

Аналіз останніх досліджень. Для розв'язання практичних задач моделювання складних технічних форм найефективнішим є дискретне представлення формованих криволінійних образів, оскільки більшість спеціалізованих програмних продуктів так чи інакше пов'язані із дискретизацією проектованого об'єкту для розрахункових, технологічних, виробничих цілей.

Вченими, що працюють у галузі прикладної геометрії, відпрацьовано ряд підходів до дискретного геометричного моделювання складних за геометрією двовимірних образів [1,2,3,4]. Кожен із них має свої переваги і недоліки стосовно розв’язання певних класів практичних задач. У цій роботі розглядається взаємозв’язок двох близьких методів побудови зрівноважених дискретних моделей криволінійних поверхонь, а саме: статико-геометричного методу проф. С.М. Ковальова та математичного апарату подвійних числових послідовностей.

Розроблені у роботах [5,6,7] алгоритми дискретного моделювання поверхонь у тривимірному просторі як статико-геометричним методом, так і за допомогою числових послідовностей на заданому опорному контурі були пов’язані із рівномірними кроком сітки дискретно представлених криволінійних поверхонь. Разом із тим, більшість складних технічних форм можливо описати дискретними моделями двовимірних образів тільки з нерівномірним кроком вузлів.

Відтак, залишається актуальною задача розробки підходів до побудови зрівноважених дискретних моделей поверхонь на нерівномірній сітці за допомогою суперпозиції подвійних числових послідовностей із абсолютним врахуванням довільно заданих крайових умов для формованих образів.

Формулювання цілей роботи. Метою даної роботи є розробка методики та алгоритмів формування зрівноважених дискретних сіток з нерівномірним кроком вузлів суперпозицією систем подвійних числових послідовностей при фіксованих крайових умовах, тобто на заданому опорному контурі.

Основна частина. Крайові умови, у загальному вигляді, можуть бути представлені або масивами координат, або як дискретні моделі параметрично заданих кривих у тривимірному просторі. Тоді при заданій кількості вузлів формованої сітки їх можна описати одновимірними числовими послідовностями (рис. 1) виду:

$$\begin{aligned}
&X_{0,k} = a_{x0} + a_{x1}k + a_{x2}k^2 + \ldots a_{xs}k^s, &\quad& X_{N-1,k} = c_{x0} + c_{x1}k + c_{x2}k^2 + \ldots c_{xs}k^s,\\
&Y_{0,k} = a_{y0} + a_{y1}k + a_{y2}k^2 + \ldots a_{ys}k^s, && Y_{N-1,k} = c_{y0} + c_{y1}k + c_{y2}k^2 + \ldots c_{ys}k^s,\\
&Z_{0,k} = a_{z0} + a_{z1}k + a_{z2}k^2 + \ldots a_{zs}k^s, && Z_{N-1,k} = c_{z0} + c_{z1}k + c_{z2}k^2 + \ldots c_{zs}k^s,\\
&X_{0,n} = b_{x0} + b_{x1}n + b_{x2}n^2 + \ldots b_{xs}n^s, && X_{K-1,n} = d_{x0} + d_{x1}n + d_{x2}n^2 + \ldots d_{xs}n^s,\\
&Y_{0,n} = b_{y0} + b_{y1}n + b_{y2}n^2 + \ldots b_{ys}n^s, && Y_{K-1,n} = d_{y0} + d_{y1}n + d_{y2}n^2 + \ldots d_{ys}n^s,\\
&Z_{0,n} = b_{z0} + b_{z1}n + b_{z2}n^2 + \ldots b_{zs}n^s, && Z_{K-1,n} = d_{z0} + d_{z1}n + d_{z2}n^2 + \ldots d_{zs}n^s,
\end{aligned} \tag{1}$$

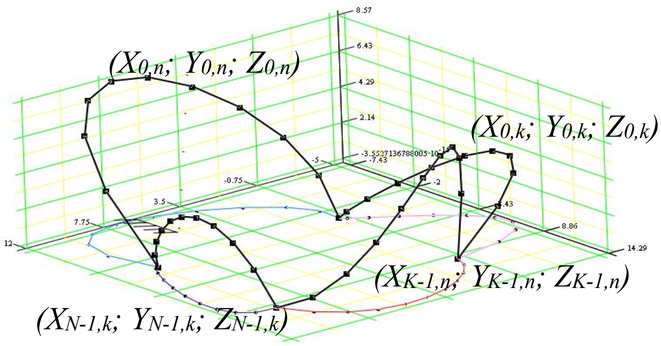

Рис. 1

Математична модель майбутнього зрівноваженого дискретно формованого об'єкту достатньо легко представляється системою рівнянь рівноваги вузлів статико-геометричного методу виду:

$$\begin{cases} X_{i,j+1} + X_{i+1,j} + X_{i-1,j} + X_{i,j-1} - 4\cdot X_{i,j} + kP^{x}{}_{i,j} = 0 \\ Y_{i,j+1} + Y_{i+1,j} + Y_{i-1,j} + Y_{i,j-1} - 4\cdot Y_{i,j} + kP^{y}{}_{i,j} = 0 \\ Z_{i,j+1} + Z_{i+1,j} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} - 4\cdot Z_{i,j} + kP^{z}{}_{i,j} = 0 \end{cases} .$$

(2)

У результаті розв'язання системи (2) отримаємо масиви координатних складових вузлів формованої дискретної моделі криволінійної поверхні. Однак при цьому, як правило, виникають проблеми точності представлення образу, які частково знімаються за рахунок згущення вузлів сітки. При цьому не можна чітко визначити критерій кількості згущень вузлів дискретної сітки з нерівномірним кроком, для досягнення потрібного результату, при розв'язанні конкретних практичних задач. Мірилом абсолютно точної дискретно представленої моделі об'єкту могли б бути подвійні числові послідовності, записані по координатним складовим у замкнутому вигляді.

Ідея роботи полягає у наступному. Створити методику формування дискретної моделі складної за геометрією криволінійної поверхні, використовуючи суперпозицію подвійних числових послідовностей, які у свою чергу є моделями простих поверхонь з нерівномірним кроком вузлів сітки.

Для забезпечення виконання двох протилежних крайових умов у напрямку n (рис. 1), враховуючи найпростішу лінійну функцію зміщення, систему подвійних числових послідовностей подамо у вигляді (рис. 2в):

$$\begin{cases} X1_{n,k} = (c_{x0} + c_{x1}k + c_{x2}k^2 + \ldots c_{xs}k^s)\dfrac{n}{N-1} + (a_{x0} + a_{x1}k + a_{x2}k^2 + \ldots a_{xs}k^s)(1 - \dfrac{n}{N-1}) \\ Y1_{n,k} = (c_{y0} + c_{y1}k + c_{y2}k^2 + \ldots c_{ys}k^s)\dfrac{n}{N-1} + (a_{y0} + a_{y1}k + a_{y2}k^2 + \ldots a_{ys}k^s)(1 - \dfrac{n}{N-1}) \\ Z1_{n,k} = (c_{z0} + c_{z1}k + c_{z2}k^2 + \ldots c_{zs}k^s)\dfrac{n}{N-1} + (a_{z0} + a_{z1}k + a_{z2}k^2 + \ldots a_{zs}k^s)(1 - \dfrac{n}{N-1}) \end{cases} \quad (3)$$

Для забезпечення виконання двох інших крайових умов у напрямку k, систему подвійних числових послідовностей запишемо аналогічним чином (рис. 2б):

$$\begin{cases} X2_{k,n} = (d_{x0} + d_{x1}n + d_{x2}n^2 + \ldots d_{xs}n^s)\dfrac{k}{K-1} + (b_{x0} + b_{x1}n + b_{x2}n^2 + \ldots b_{xs}n^s)(1 - \dfrac{k}{K-1}) \\ Y2_{k,n} = (d_{y0} + d_{y1}n + d_{y2}n^2 + \ldots d_{ys}n^s)\dfrac{k}{K-1} + (b_{y0} + b_{y1}n + b_{y2}n^2 + \ldots b_{ys}n^s)(1 - \dfrac{k}{K-1}) \\ Z2_{k,n} = (d_{z0} + d_{z1}n + d_{z2}n^2 + \ldots d_{zs}n^s)\dfrac{k}{K-1} + (b_{z0} + b_{z1}n + b_{z2}n^2 + \ldots b_{zs}n^s)(1 - \dfrac{k}{K-1}) \end{cases} \quad (4)$$

Ці дві ситеми подвійних числових послідовностей у загальному випадку є дискретними моделями циліндроїдів з нерівномірним кроком вузлів, побудованих у двох взаємно перпендикулярних напрямах на опорних кривих (1).

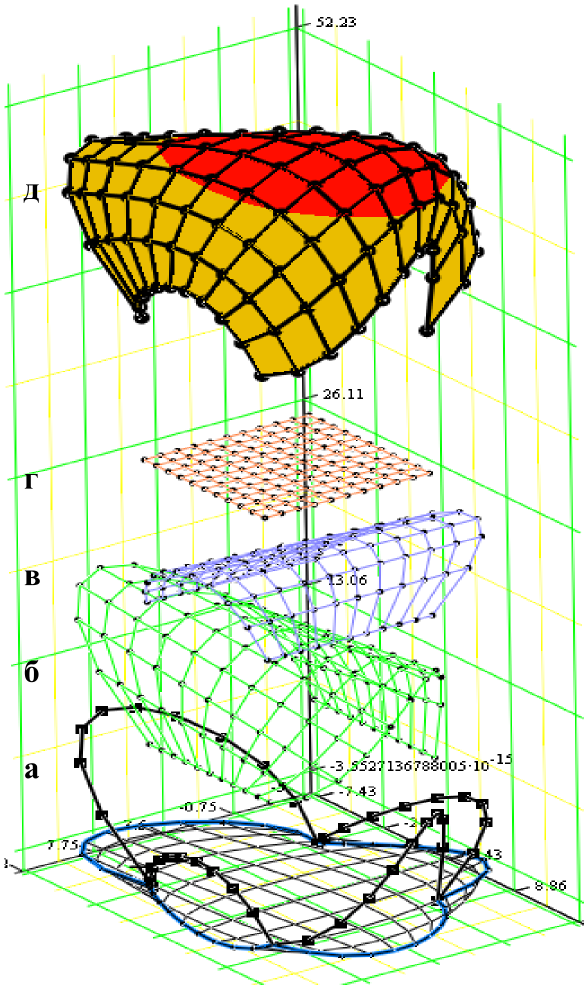

Рис.2

Ще одним необхідним елементом побудови дискретної моделі криволінійної поверхні із заданим опорним контуром є система подвійних числових послідовностей виду (рис. 2г):

$$\begin{cases} XG_{n,k} = (w_{x0} + w_{x1}k)\dfrac{n}{N-1} + (v_{x0} + v_{x1}k)(1 - \dfrac{n}{N-1}) \\ YG_{n,k} = (w_{y0} + w_{y1}k)\dfrac{n}{N-1} + (v_{y0} + v_{y1}k)(1 - \dfrac{n}{N-1}) \\ ZG_{n,k} = (w_{z0} + w_{z1}k)\dfrac{n}{N-1} + (v_{z0} + v_{z1}k)(1 - \dfrac{n}{N-1}) \end{cases}$$

(5)

яка є дискретною моделлю відсіку гіперболічного параболоїда з нерівномірним кроком вузлів, побудованого на кутових точках опорного контуру (1).

Результуючу дискретну модель формованої поверхні, яка абсолютно точно забезпечить виконання заданих крайових умов, можна подати за допомогою суперпозиції базових подвійних числових послідовностей (3), (4), (5) у вигляді системи (рис. 2д):

$$
\begin{cases}
XSP_{n,k} = (c_{x0} + c_{x1}k + c_{x2}k^2 + ...c_{xs}k^s)\dfrac{n}{N-1} + (a_{x0} + a_{x1}k + a_{x2}k^2 + ...a_{xs}k^s)(1-\dfrac{n}{N-1}) + \\
+(d_{x0} + d_{x1}n + d_{x2}n^2 + ...d_{xs}n^s)\dfrac{k}{K-1} + (b_{x0} + b_{x1}n + b_{x2}n^2 + ...b_{xs}n^s)(1-\dfrac{k}{K-1}) - \\
-(w_{x0} + w_{x1}k)\dfrac{n}{N-1} - (v_{x0} + v_{x1}k)(1-\dfrac{n}{N-1}) \\
YSP_{n,k} = (c_{y0} + c_{y1}k + c_{y2}k^2 + ...c_{ys}k^s)\dfrac{n}{N-1} + (a_{y0} + a_{y1}k + a_{y2}k^2 + ...a_{ys}k^s)(1-\dfrac{n}{N-1}) + \\
+(d_{y0} + d_{y1}n + d_{y2}n^2 + ...d_{ys}n^s)\dfrac{k}{K-1} + (b_{y0} + b_{y1}n + b_{y2}n^2 + ...b_{ys}n^s)(1-\dfrac{k}{K-1}) - \\
-(w_{y0} + w_{y1}k)\dfrac{n}{N-1} - (v_{y0} + v_{y1}k)(1-\dfrac{n}{N-1}) \\
ZSP_{n,k} = (c_{z0} + c_{z1}k + c_{z2}k^2 + ...c_{zs}k^s)\dfrac{n}{N-1} + (a_{z0} + a_{z1}k + a_{z2}k^2 + ...a_{zs}k^s)(1-\dfrac{n}{N-1}) + \\
+(d_{z0} + d_{z1}n + d_{z2}n^2 + ...d_{zs}n^s)\dfrac{k}{K-1} + (b_{z0} + b_{z1}n + b_{z2}n^2 + ...b_{zs}n^s)(1-\dfrac{k}{K-1}) - \\
-(w_{z0} + w_{z1}k)\dfrac{n}{N-1} - (v_{z0} + v_{z1}k)(1-\dfrac{n}{N-1})
\end{cases}
\qquad (6)
$$

де k і n – нумерація членів подвійних числових послідовностей у двох взаємно перпендикулярних напрямках,

K і N - кількість вузлів сітки у напрямках k і n.

Даний процес є аналогічним до формування відсіків криволінійних поверхонь за Кунсом.

При заданих коефіцієнтах у (6) дискретна модель криволінійної поверхні будується для будь-яких комбінацій k і n. Але вузли такої моделі не знаходитимуться у рівновазі, відповідно до основних положень статико-геометричного методу моделювання.

Для приведення до рівноваги вузлів дискретної моделі, формованої на заданому опорному контурі поверхні, необхідно із (6) виокремити функцію зовнішнього формоутворюючого навантаження, що діє на вузли моделі. Для цього потрібно визначитись із коефіцієнтами скінченно-різницевих операторів, що лежать в основі моделі, побудованої статико-геометричним методом, тобто коефіцієнтами відповідних обчислювальних шаблонів.

Наприклад, нехай в основі формування зрівноваженої сітки лежить шаблон (2). Тоді для встановлення рівноваги вузлів дискретної моделі сітки, з нерівномірним кроком вузлів, описаної системою подвійних числових послідовностей (6), достатньо до координатних складових вузлів у лінійній системі скінченно-різницевих рівнянь (2) статико-геометричного методу прикласти складові функціонального навантаження виду:

$$
\begin{cases}
Px_{n,k} = -2(\frac{c_{x2}k}{K-1} + \frac{3c_{x3}kn}{K-1} + ...\frac{s(s-1)c_{xs}kn^{s-2}}{2(K-1)} + \frac{d_{x2}n}{N-1} + \frac{3d_{x3}nk}{N-1} + \\
...\frac{s(s-1)d_{xs}nk^{s-2}}{2(N-1)} + \frac{a_{x2}(K-k-1)}{K-1} + \frac{3a_{x3}(K-k-1)n}{K-1} + ...\frac{s(s-1)a_{xs}(K-k-1)n^{s-2}}{2(K-1)} + \\
\frac{b_{x2}(N-n-1)}{N-1} + \frac{3b_{x3}(N-n-1)k}{N-1} + ...\frac{s(s-1)b_{xs}(N-n-1)k^{s-2}}{2(N-1)}) \\
Py_{n,k} = -2(\frac{c_{y2}k}{K-1} + \frac{3c_{y3}kn}{K-1} + ...\frac{s(s-1)c_{ys}kn^{s-2}}{2(K-1)} + \frac{d_{y2}n}{N-1} + \frac{3d_{y3}nk}{N-1} + \\
...\frac{s(s-1)d_{ys}nk^{s-2}}{2(N-1)} + \frac{a_{y2}(K-k-1)}{K-1} + \frac{3a_{y3}(K-k-1)n}{K-1} + ...\frac{s(s-1)a_{ys}(K-k-1)n^{s-2}}{2(K-1)} + \\
\frac{b_{y2}(N-n-1)}{N-1} + \frac{3b_{y3}(N-n-1)k}{N-1} + ...\frac{s(s-1)b_{ys}(N-n-1)k^{s-2}}{2(N-1)}) \\
Pz_{n,k} = -2(\frac{c_{z2}k}{K-1} + \frac{3c_{z3}kn}{K-1} + ...\frac{s(s-1)c_{zs}kn^{s-2}}{2(K-1)} + \frac{d_{z2}n}{N-1} + \frac{3d_{z3}nk}{N-1} + \\
...\frac{s(s-1)d_{zs}nk^{s-2}}{2(N-1)} + \frac{a_{z2}(K-k-1)}{K-1} + \frac{3a_{z3}(K-k-1)n}{K-1} + ...\frac{s(s-1)a_{zs}(K-k-1)n^{s-2}}{2(K-1)} + \\
\frac{b_{z2}(N-n-1)}{N-1} + \frac{3b_{z3}(N-n-1)k}{N-1} + ...\frac{s(s-1)b_{zs}(N-n-1)k^{s-2}}{2(N-1)})
\end{cases}
\quad (7)
$$

На рис. 2 наведено процес поетапного створення дискретної моделі зрівноваженої сітки на заданому опорному контурі за допомогою суперпозиції подвійних числових послідовностей. Дискретна модель (6) є абсолютно точною, для образу відсутня проблема згущення сітки до досягнення заданої точності. Крім того, дана модель є "ідеалом" або мірилом точності для будь-яких дискретно представлених зрівноважених сіток, побудованих на заданому опорному контурі.

При необхідності переходу дискретної моделі (6) до її неперервного аналога достатньо дискретні параметри k і n замінити на неперервні x та y.

Висновки. У роботі запропоновано підхід та методику формування зрівноважених дискретно представлених двовимірних образів з нерівномірним кроком вузлів за допомогою суперпозиції подвійних числових послідовностей із абсолютним забезпеченням заданих крайових умов. Представлена методика дає можливість зняти проблему розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь рівноваги формування моделей з нерівномірними кроком вузлів статико-геометричним методом, проблему згущення сіток до досягнення заданої точності, забезпечує швидкий перехід від дискретних моделей двовимірних образів до їх неперервних аналогів.

Література

1. *Ковалев С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дисс. докт. техн. наук. – М., 1986. – 348 с.
2. *Пустюльга С.І.* Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями. Дис….докт. техн. наук. 05.01.01. / К.: КНУБА, 2006. – 320с.
3. *Верещага В.М.* Дискретно-параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей. /Дис….. докт. техн. наук: 05.01.01 /Киев, 1996. - 320с.
4. *Грибов С.М.* Дискретна геометрія інтерактивного конструювання кінематичних поверхонь на основі скінченних сум. Автореф. дис….. докт. техн. наук. - Київ, 1994. - 48 с.
5. *Пустюльга С.І.* Формування подвійних числових послідовностей для моделювання ДВП при заданих початкових умовах. // Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К., 2005, вип.75, с. 146-151.
6. *Пустюльга С.І., Самостян В.Р.* Вплив крайових умов на формування зрівноважених двовимірних образів числовими послідовностями.- Прикладна геометрія та інженерна графіка. К., 2008, вип.79, с. 57-62.
7. *Пустюльга С.І., Самостян В.Р.* Моделювання зрівноважених дискретно представлених криволінійних поверхонь із заданими крайовими умовами числовими послідовностями. - Прикладна геометрія та інженерна графіка": - К., 2009. - Вип. 82. – С. 208-214.

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНОВЕШЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК, С НЕРАВНОМЕРНЫМ ШАГОМ УЗЛОВ, СУПЕРПОЗИЦИЕЙ ДВОЙНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С.И. Пустюльга, В.Р. Самостян, А.А. Хомыч

В работе исследованы процессы формирования уравновешенных дискретно представленных двумерных образов с неравномерным шагом узлов при помощи суперпозиции двойных последовательностей.

DISCRETE SIMULATION BALANCED CURVILINEAR GRIDS WITH IRREGULAR PITCH NODES SUPERPOSITION OF DOUBLE NUMERICAL SEQUENCES

S. Pustyulga, V. Samostyan, A. Homych

In this paper, the processes of formation of balanced discrete two-dimensional images presented with irregular pitch components by means of a superposition of double sequences.