

КРАТНОМАСШТАБНИЙ АНАЛІЗ ФОРМИ ПРОСТОРОВОГО ТІЛА НА ОСНОВІ 3D-ВЕЙВЛЕТІВ ХААРА

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
м. Дніпропетровськ, Україна*

В роботі наводиться аналітичний вираз для 2D- та 3D-вейвлетів Хаара, одержаний шляхом тензорного добутку їх одновимірних варіантів, і побудована схема швидкого дискретного вейвлет-перетворення на основі останніх для кратномасштабного аналізу форми тривимірного об'єкту.

Постановка проблеми. Вейвлети є популярним засобом аналізу форми об'єктів. В тому числі, коли форма подана дискретною моделлю (ДМ): гістограмою для одновимірного об'єкту, матрицею — для двовимірного, і воксельною — у випадку просторового тіла. Аналіз і реконструкція форми останнього із застосуванням вейвлетів ефективно може бути здійснена лише за наявності прозорої геометричної інтерпретації інструменту аналізу — вейвлетів відповідної розмірності. Проблемою є відсутність відповідних аналітичних виразів для вейвлетів розмірності більшої за 1.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Завдяки ортогональності, компактності і гарній локалізації у просторі в кратномасштабному аналізі (КМА) дискретно-поданих даних активно використовуються вейвлети Хаара [1, 2]. Відомі швидкі алгоритми дискретного вейвлет перетворення (ДВП) на їх основі для одно- [1 – 3] та двовимірних випадків [4]. Що стосується використання 3D-вейвлетів Хаара, то мається досвід їх використання для обробки масивів даних, сформованих засобами магніто-резонансної томографії [5]. Також вони знайшли застосування в роботі з RGB-зображеннями [6]. В [7] запропоновано їх залучення до аналізу форми просторового тіла, поданого воксельною моделлю (ВМ).

Постановка задачі. Слід отримати аналітичні вирази вейвлетів Хаара розмірності більшої за 1 і розробити схему КМА ДМ просторового об'єкта на основі їх тривимірних варіантів.

Основна частина. Нехай функція $\psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -вимірний вейвлет, що означає виконання для неї наступних умов [1]:

$$\psi(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ і } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (1)$$

Тоді вейвлет-перетворення довільної функції $f(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ матиме вигляд [1]:

$$Wf(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \psi\left(\frac{\mathbf{b} - \mathbf{x}}{\mathbf{a}}\right) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Вейвлети виду $\Psi = \{\psi_{m,k}(\mathbf{x}) = 2^{m/2} \psi(2^{m/2} \mathbf{x} - \mathbf{k})\}$ для фіксованого $m \in$ базисом підпростору $W_m = V_m \setminus V_{m-1}$ ($m = 0, \pm 1, \dots$) в ортогональному кратно-масштабному аналізі (КМА) форми, визначеної за допомогою $f(\mathbf{x})$ [1].

Безпосередній шлях побудови n -вимірному ортонормального базису, виходячи з одновимірному ортонормального вейвлет-базису Ψ полягає у застосуванні тензорного добутку для утворення відповідної функції з n одновимірних базисів (мається і інша можливість, зазначена в [3]):

$$\Psi_{j_1 k_1 j_2 k_2 \dots j_n k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_{j_1 k_1}(x_1) \otimes \psi_{j_2 k_2}(x_2) \otimes \dots \otimes \psi_{j_n k_n}(x_n), \quad (3)$$

де \otimes — операція тензорного добутку.

В даному базисі всі змінні x_i , $i = \overline{1, n}$ змінюються порізно. Між тим, найбільший інтерес має конструкція, в якій масштабування отриманого ортонормованого вейвлет-базису здійснюється за всіма змінними однаково. В цьому випадку n -вимірні вейвлети задаються наступними виразами:

$$\Psi_{j k_1 k_2 \dots k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2^j \psi(2^j x_1 - k_1, 2^j x_2 - k_2, \dots, 2^j x_n - k_n). \quad (4)$$

Як відомо [3], у загальному n -вимірному випадку існує $2^n - 1$ функцій, що утворюють ортонормальний базис і здійснюють КМА будь-якої функції з $L^2(R^n)$. Тому функція Ψ (4) вже не буде єдиною функцією, а навпаки, буде сформована з $2^n - 1$ елементарних вейвлетів і, щоб створити ортонормований базис, тепер слід буде використати $2^n - 1$ сімейства.

Геометрична інтерпретація цього сімейства полягає в тому, що кількість елементарних вейвлетів $N_w = 2^n - 1$ визначає кількість напрямів аналізу моделі у просторі. Так, нехай t — параметр ($t \in Z$). Тоді в ортонормованому базисі $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ напрями аналізу моделей будуть визначатися наступними виразами:

— випадок одновимірної ДМ ($n = 1$, $N_w = 1$): $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i}t$;

— випадок двовимірної ДМ ($n = 2$, $N_w = 3$):

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i}t, \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{j}t, \quad \mathbf{r}_3(t) = (\mathbf{i} + \mathbf{j})t;$$

— випадок тривимірної ДМ ($n = 3$, $N_w = 7$):

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i}t, \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{j}t, \quad \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{k}t, \quad \mathbf{r}_4(t) = (\mathbf{i} + \mathbf{j})t, \quad \mathbf{r}_5(t) = (\mathbf{j} + \mathbf{k})t, \quad \mathbf{r}_6(t) = (\mathbf{k} + \mathbf{i})t, \quad \mathbf{r}_7(t) = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})t;$$

Визначимо аналітичні вирази елементів одного з найпоширеніших вейвлет-базисів — базиса Хаара [1, 2], скейлінг-функція якого φ і сам вейвлет ψ у випадку одної розмірності визначаються як

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2) \\ -1, & x \in [1/2, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases} \quad (5)$$

Скориставшись наведеним вище підходом конструювання вейвлетів довільної розмірності (3), можна отримати подання (5) для випадку 2D у вигляді:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q \\ 0, & (x, y) \notin Q \end{cases}, \quad \psi(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q_1^+ \vee Q_2^+ \\ -1, & (x, y) \in Q_1^- \vee Q_2^-, \\ 0, & (x, y) \notin Q \end{cases}, \quad (6)$$

де Q — квадрат, з вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$; Q_1^+ — квадрат з вершинами $(0, 0)$, $(0, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 0)$, Q_2^+ — квадрат з вершинами $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 1/2)$, Q_1^- — квадрат з вершинами $(0, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 1)$, $(0, 1)$, Q_2^- — квадрат з вершинами $(1/2, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$.

Аналогічно, аналітичний вираз для 3D-вейвлетів Хаара має вигляд:

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in C \\ 0, & (x, y, z) \notin C \end{cases}, \quad \psi(x, y, z) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in C_1^+ \vee C_2^+ \vee C_3^+ \vee C_4^+ \\ -1, & (x, y, z) \in C_1^- \vee C_2^- \vee C_3^- \vee C_4^-, \\ 0, & (x, y, z) \notin C \end{cases}, \quad (7)$$

де C — куб з вершинами $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$; C_1^+ — куб з вершинами $(0, 0, 0)$, $(0, 1/2, 0)$, $(1/2, 1/2, 0)$, $(1/2, 0, 0)$, $(0, 0, 1/2)$, $(0, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 0, 1/2)$; C_2^+ — куб з вершинами $(1/2, 1/2, 0)$, $(1/2, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1/2, 0)$, $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1, 1/2)$, $(1, 1, 1/2)$, $(1, 1/2, 1/2)$; C_3^+ — куб з вершинами $(0, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1, 1/2)$, $(0, 1, 1/2)$, $(0, 1/2, 1)$, $(1/2, 1/2, 1)$, $(1/2, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$; C_4^+ — куб з вершинами $(1/2, 0, 1/2)$, $(1, 0, 1/2)$, $(1, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1/2, 1)$, $(1/2, 1/2, 1)$; C_1^- — куб з вершинами $(0, 1/2, 0)$, $(1/2, 1/2, 0)$, $(1/2, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1, 1/2)$, $(0, 1, 1/2)$; C_2^- — куб з вершинами $(1/2, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1/2, 0)$, $(1/2, 1/2, 0)$, $(1/2, 0, 1/2)$, $(1, 0, 1/2)$, $(1, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 1/2)$; C_3^- — куб з вершинами $(0, 0, 1/2)$, $(0, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 0, 1/2)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1/2, 1)$, $(1/2, 1/2, 1)$, $(1/2, 0, 1)$; C_4^- — куб з вершинами $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1, 1/2)$, $(1, 1, 1/2)$, $(1, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 1)$, $(1/2, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1/2, 1)$.

Розглянемо питання організації КМА ДМ на основі вейвлетів Хаара у випадку 3D. Задача КМА [1 – 4] полягає у виділенні мілкомасштабних (узагальнюючих — L від low) і крупномасштабних (деталізуючих — H від high) складових ДМ, що подає форму об'єкта. Основу КМА ДМ складає ДВП, яке для випадків 1D та 2D широко використовується в аналізі

сигналів та зображень [1 – 4]. Реалізація ДВП для 3D не так поширена, але мають певні результати і для цього випадку [5, 6]. Відомо, що для КМА 2D-об'єктів зазвичай використовується схема порядково-стовпцевої розгортки матриці, що подає ДМ об'єкта [4]. При аналізі 3D-об'єкту може бути застосовано той самий принцип, умовно проілюстрований на рис. 1.

Зазначимо, що схема прямої реалізації ДВП може бути оптимізована за рахунок того, що простір V_m є прямою сумою просторів W_{m-1} та V_{m-1} : $V_m = W_{m-1} + V_{m-1}$. Тоді, маючи поточне подання функції в просторі V_m , можна отримати її подання в просторах W_{m-1} і V_{m-1} шляхом проєціювання [1 – 4].

Ідея прискорення розрахунків аналогічна випадкам 1D [1] та 2D [2, 4]. Відмінність тривимірного випадку полягає в тому, що елемент наступного рівня розраховується за вісьмома елементами попереднього замість чотирьох (випадок 2D) або двох (випадок 1D).

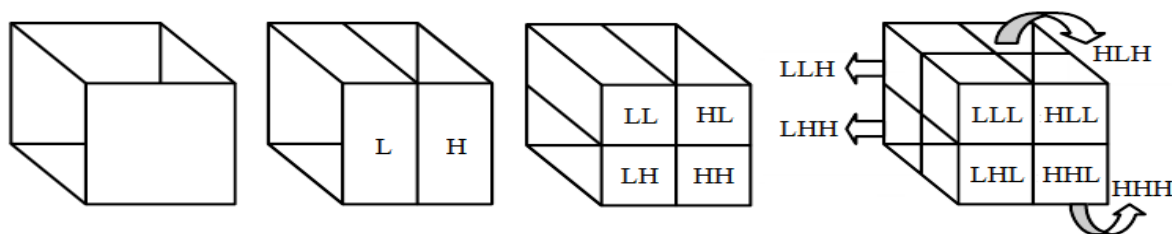


Рис. 1. Схема реалізації ДВП у випадку тривимірної ДМ об'єкта

Швидкий алгоритм ДВП складається з L кроків, за числом рівнів деталізації. Так, для рівня l : $i, j, k = \overline{0, D(l)-1}$, де $D(l) = N/2^l = 2^{L-l}$ формули мають наступні вигляд ($l = \overline{1, L}$, при $l = 0$ маємо ${}_0 w_{i,j,k}^{+++} = v_{i,j,k}$ — коефіцієнт розкладу ${}_0 w_{i,j,k}^{+++}$ збігається з відповідними елементом ДМ $v_{i,j,k}$).

$$\begin{aligned}
{}_l w_{i,j,k}^{+++} &= \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i,2j,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i,2j,2k+1}^{+++} \right] + \left[{}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} + \\
&+ \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k+1}^{+++} \right] + \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} \\
{}_l w_{i,j,k}^{++-} &= \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i,2j,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i,2j,2k+1}^{+++} \right] + \left[{}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} + \\
&+ \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k+1}^{+++} \right] + \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} \\
{}_l w_{i,j,k}^{+-+} &= \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i,2j,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i,2j,2k+1}^{+++} \right] - \left[{}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} + \\
&+ \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k+1}^{+++} \right] - \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} \\
{}_l w_{i,j,k}^{+--} &= \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i,2j,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i,2j,2k+1}^{+++} \right] - \left[{}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} + \\
&+ \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k+1}^{+++} \right] - \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} \\
{}_l w_{i,j,k}^{-++} &= \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i,2j,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i,2j,2k+1}^{+++} \right] + \left[{}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} - \\
&- \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k+1}^{+++} \right] + \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} \\
{}_l w_{i,j,k}^{-+-} &= \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i,2j,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i,2j,2k+1}^{+++} \right] + \left[{}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} - \\
&- \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k+1}^{+++} \right] + \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} \\
{}_l w_{i,j,k}^{-+} &= \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i,2j,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i,2j,2k+1}^{+++} \right] - \left[{}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} - \\
&- \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k+1}^{+++} \right] - \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k}^{+++} + {}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} \\
{}_l w_{i,j,k}^{---} &= \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i,2j,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i,2j,2k+1}^{+++} \right] - \left[{}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\} - \\
&- \left\{ \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i+1,2j,2k+1}^{+++} \right] - \left[{}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k}^{+++} - {}_{l-1} w_{2i+1,2j+1,2k+1}^{+++} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{8}$$

Висновки. Отримані аналітичні вирази для 2D- та 3D-вейвлетів Хаара; схема швидкого ДВП узагальнена на випадок 3D, що дає змогу ефективно використовувати його для КМА форм просторових об'єктів, поданих своїми ДМ, наприклад, — воксельними.

Література

1. *I. Daubechies.* Ten Lectures on Wavelets // CBMS-NSF Lecture Notes nr. 61, SIAM, 1992. — 377 p.
2. *M. Holschneider.* A real-time algorithm for signal analysis with help of the wavelet transform // M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, Ph. Tchamitchian Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space, Chapter A. Berlin: Springer-Verlag, 1989. — pp. 289 – 297.
3. *Дремін І. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А.* Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук, 2001. — Том 171, № 5. — С. 465 – 501

4. *Копенков В. Н.* Эффективные алгоритмы локального дискретного вейвлет-преобразования с базисом Хаара. // Компьютерная оптика, 2008. — Том 32, №1. — С. 78 – 84

5. *Pinnamaneni Pujita, Saladi Sagar, Meyer Joerg.* 3-D Haar Wavelet Transformation and Texture-Based 3-D Reconstruction of Biomedical Data Sets // Visualization, Imaging and Image Processing (VIIP 2001), The International Association of Science and Technology for Development, Marbella, Spain, ACTA Press, 2001. — pp. 389 – 394

6. *Chandrajit Bajaj, Insung Ihm, Sanghun Park.* 3D RGB Image Compression for Interactive Applications // ACM Transactions on Graphics, Vol. 20, No. 1, January 2001, — pp. 10 – 38

7. *Реута О. В.* Використання перетворення Хаара при розпізнаванні просторових об'єктів на основі піраміди моделей – // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 2012. — Вип. 89 — С. 306 – 310.

**КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ ФОРМЫ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЛА НА ОСНОВЕ 3D-ВЕЙВЛЕТОВ
ХААРА
А. В. Реута**

В работе приведено аналитическое выражение для 2D- и 3D-вейвлетов Хаара, полученное путем тензорного произведения их одномерных вариантов, и построена схема быстрого дискретного вейвлет-преобразования на основе последних для кратномасштабного анализа формы трехмерного объекта.

**MULTIRESOLUTION ANALYSIS OF A SPACE OBJECT'S SHAPE
ON BASE OF 3D HAAR WAVELETS
O. Reuta**

An analytical expression for the 2D and 3D Haar wavelets has been obtained as a tensor product of their one-dimensional versions. A scheme of fast discrete wavelet transform for multiresolution analysis of a 3D object's shape has been constructed based on 3D Haar wavelets.