УДК 514.18 **А.О. Бездітний**, к.т.н.*

ФУНКЦІОНАЛЬНІ КРИВІ ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ, ФОРМАЛІЗОВАНІ ЗАСОБАМИ ТОЧКОВОГО ЧИСЛЕННЯ БАЛЮБИ-НАЙДИША

Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Запорізький національний університет, Україна

У статті наведено побудову стичної площини дуги просторової кривої та бінормалі до неї засобами БН-числення.

Постановка проблеми. Під час розробки теорії функціональних кривих, кожна з супровідних якої повинна визначати свій окремий параметр, виникла необхідність визначення супровідних кривих, що визначають кінематичні характеристики процесів, пов'язаних з вихідною кривою. У диференційній геометрії [1] дуже важливу роль у кінематичному описі точки відіграє тригранник Френе. Для побудови аналога тригранника у БН-численні потрібно визначити функціональні криві дотичних, нормалей та бінормалей дуги просторової кривої та ступінь її скруту у мінливій точці.

Аналіз останніх досліджень. Питання побудови тригранника Френе та визначення коефіцієнта скруту висвітлено у багатьох виданнях, присвячених диференційній геометрії [1,2]. Побудова тригранника здійснюється за допомогою векторів, а сам процес розв'язання зводиться до побудови тригранника у кожній окремій точці дуги просторової кривої, що суттєво ускладнює процес дослідження ступеня її скруту по всій довжині. Для уникнення цих складнощів, запропоновано залучити до побудови тригранника теорію функціональних кривих, що дозволить побудувати тригранник у кожній точці дуги просторової кривої. У цій статті ми вперше спробуємо формалізувати цю задачу засобами БН-числення [3].

Формування цілей статті. Побудувати функціональні криві, які визначають аналог тригранника Френе у БН-численні.

Основна частина. У роботі [2] був запропонований алгоритм визначення дотичної до кривої як відрізку, що з'єднує поточну точку кривої з відповідною точкою похідної кривої M' [5]. Кінцеве рівняння похідної кривої має вигляд:

$$M' = M + \dot{M}, \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned} M &= \left(A-D\right)p\left(t\right)+\left(B-D\right)q\left(t\right)+(C-D)r(t)+D; \\ \dot{M} &= \left(A-D\right)\dot{p}\left(t\right)+\left(B-D\right)\dot{q}\left(t\right)+(C-D)\dot{r}(t). \end{aligned} \tag{2}$$

*Науковий консультант: д.т.н., професор А.В. Найдиш

Таким чином, MM' визначає дотичну до кривої, що розглядається, у кожній її точці (рис. 1).

Виходячи з джерел [1,2], за умов будь-якої параметризації кривої, вектор другої похідної її радіус-вектора розташований у її стичній площині. Тому, по аналогії з (1), маємо:

$$M'' = M + \ddot{M}\,, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned} M &= (A-D)\,p(t) + (B-D)\,q(t) + (C-D)r(t) + D; \\ \ddot{M} &= (A-D)\,\ddot{p}(t) + (B-D)\,\ddot{q}(t) + (C-D)\ddot{r}(t). \end{aligned} \tag{4}$$

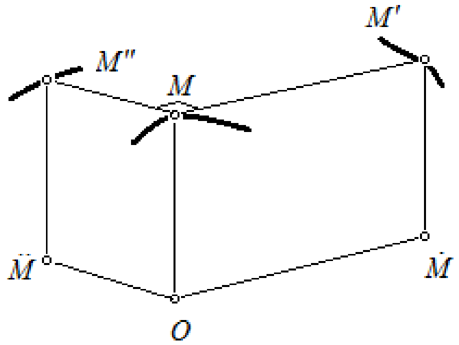

Рис.1. Дуга M та її супровідні криві M' та M''.

Таким чином, отримаємо просторові криві лінії, які визначають дотичну MM' та нормаль MM'' (рис. 1) вихідної дуги кривої M у її поточній точці. Визначимо бінормаль до стичної площини $MM'M''$, що визначається двома прямими MM' та MM''. Виконаємо побудову точки виходу із площини $MM'M''$ у поточній точці M [4].

$S(s^{yz}, s^{zx}, s^{xy})$ – точка виходу з площини $MM'M''$, яка знаходиться на прямій, що перпендикулярна до площини $MM'M''$. Її координати, у глобальній системі координат, дорівнюють площам проекцій трикутника $MM'M''$ на площини проекцій (Π_1), (Π_2), (Π_3), які визначаються координатами *(x;y)*, *(x;z)* та *(y;z)* відповідно. Використаємо отриману точку S для побудови бінормалі MK до площини $MM'M''$. Координати точки S у глобальній системі координат визначаються наступними аналітичними залежностями:

$$x_S = s^{yz} = \begin{vmatrix} y_M & z_M & 1 \\ y_{M'} & z_{M'} & 1 \\ y_{M''} & z_{M''} & 1 \end{vmatrix}, y_S = s^{zx} = \begin{vmatrix} z_M & x_M & 1 \\ z_{M'} & x_{M'} & 1 \\ z_{M''} & x_{M''} & 1 \end{vmatrix},$$

$$z_S = s^{xy} = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_{M'} & y_{M'} & 1 \\ x_{M''} & y_{M''} & 1 \end{vmatrix}.$$

Тепер визначимо точку виходу (із площини $MM'M''$) на задану відстань d:

$$K_0 = \frac{Sd}{\sqrt{(s^{yz})^2 + (s^{zx})^2 + (s^{xy})^2}}.$$

Ми отримали точку, яка знаходиться на відстані d від стичної площини $MM'M''$, таким чином визначивши напрям бінормалі ML до стичної площини. Для того, щоб визначити бінормаль у поточній точці M, виконаємо наступні дії:

$$K = M + \frac{Sd}{\sqrt{(s^{yz})^2 + (s^{zx})^2 + (s^{xy})^2}}. \qquad (5)$$

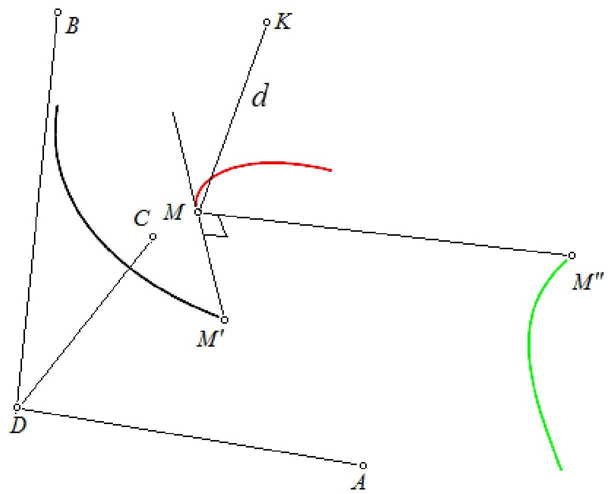

Рис. 2. Визначення супровідної площини $MM'M''$ просторової кривої M.

На рис.2 $MM'M''$ – стична площина, $MM''K$ – нормальна площина, $MM'K$ – спрямляючи площина.

Таким чином, отримаємо систему точкових рівнянь, що визначає функціональні криві, які відтворюють аналог тригранника Френе у БН-численні:

$$\begin{cases} M = (A-D)p(t) + (B-D)q(t) + (C-D)r(t) + D; \\ M' = (A-D)(p(t)+\dot{p}(t)) + (B-D)(q(t)+\dot{q}(t)) + (C-D)(r(t)+\dot{r}(t))L \\ M'' = (A-D)(p(t)+\ddot{p}(t)) + (B-D)(q(t)+\ddot{q}(t)) + (C-D)(r(t)+\ddot{r}(t)), \\ K = M + \dfrac{Sd}{\sqrt{(s^{yz})^2 + (s^{zx})^2 + (s^{xy})^2}}. \end{cases} \qquad (6)$$

Якщо на ребрах MM', MM'', ML цього тригранника відкласти одиничні вектори – то ми отримаємо тригранник Френе у загальновідомому вигляді.

Висновки. У результаті проведених досліджень, побудовано стичну площину дуги просторової кривої лінії та бінормаль до неї, які визначають функціональні криві, що дають змогу отримати аналог тригранника Френе у точкового числення Балюби-Найдиша. Ці дослідження відкривають шлях до обчислення кінематичних характеристик системи або процесу, що розглядається. Наступним кроком у цих дослідженнях буде обчислення ступеня скруту дуги просторової кривої у будь-якій поточній точці.

Література

1. *Фініков С.П.* Диференційна геометрія. Курс лекцій механічного відділення механіко-математичного факультету МГУ / Москва: видавництво московського університету, 1961. – 158 с.

2. *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии / Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1958. – 244 с.

3. *Балюба И.Г.* Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: диссертация на соискание научной степени доктора технических наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.

4. *Бездітний А.О*. Варіативне дискретне геометричне моделювання на основі геометричних співвідношень у точковому численні Балюби–Найдиша: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / ТДАТУ.– Мелітополь, 2012.– 191с.

5. *Бездітний А.О.* Функціональна крива відстані засобами БН-числення / А.О. Бездітний // Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 48. – Мелітополь: ТДАТА, 2013.–С.158-161.

DOUBLE PERPENDICULAR OF SPACE CURVE TANGENT CONSTRUCTION BY THE METHODS OF DOT CALCULATION

A.Bezditny

We construct the tangent and double perpendicular of space curve by the methods of dot calculation.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ, ФОРМАЛИЗОВАННЫЕ СРЕДСТВАМИ ТОЧЕЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ БАЛЮБА-НАЙДЫША

А.А. Бездитный

В статье приведено построение соприкосающейся плоскости дуги пространственной кривой и бинормали к ней средствами БН-исчисления.