

ФОРМОУТВОРЕННЯ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ ПОВЕРХОНЬ ПОКРИТТЯ З ПЛАНАМИ У ФОРМІ КРУГОВОГО СЕКТОРА

Луцький національний технічний університет, Україна

Робота присвячена дослідженню формоутворення двовимірних образів з проєкціями на горизонтальну площину у формі кругового сектора з рівномірним кроком вузлів у радіальному та коловому напрямках. На основі статико-геометричного методу моделювання проф. С.М. Ковальова запропоновано алгоритм побудови дискретно представлених зрівноважених сіток в циліндричній системі координат.

Постановка проблеми. Спортивно-видовищні споруди, такі як криті стадіони, палаци спорту тощо в переважній більшості не прямокутні в плані. Тому побудова моделі покриття на прямокутній сітці в декартовій системі координат призводить до ускладнення обчислювальних алгоритмів у зв'язку з нерегулярною структурою елементів приконтурних ділянок. Спростити алгоритми формоутворення можна за рахунок використання сітки регулярної структури. Для цього необхідно розв'язувати задачі формоутворення в тій системі координат, яка відповідає характеру горизонтальної проєкції покриття. Якщо проєкція поверхні в плані обмежена колом або його дугою, тоді її формування доцільно здійснювати в циліндричній системі координат, якщо ж частина проєкції обмежена еліпсом – то в еліптичній. Вузли регулярної сітки будуть сформовані точками перетину ліній відповідних координатних напрямів.

В практиці геометричного моделювання архітектурних поверхонь покриття широко застосовується дискретне представлення об'єктів [1]. Це зумовлене можливістю розробки гнучких алгоритмів розрахунку форми поверхні з врахуванням необхідної кількості вихідних умов, простому аналітичному представленню алгоритмів та легкою реалізацією обчислень на ЕОМ.

У зв'язку з цим, актуальними є дослідження та розробка алгоритмів формоутворення дискретних поверхонь, геометрія яких ефективніше описується в циліндричній системі координат, ніж в декартовій.

Аналіз останніх досліджень. Способам дискретного представлення поверхонь та питанням управління їх формою присвячено ряд робіт вчених, що працюють в області прикладної геометрії. Проте в опублікованих роботах недостатньо уваги приділено дослідженню способів моделювання дискретно представлених поверхонь з не прямокутною формою в плані, зокрема випадкам, коли для формування регулярної сітки використовуються криволінійні системи координат.

Близькою до тематики дослідження є робота [2] в якій розглядалась задача формування зрівноваженої сітки з планом у формі кільцевого сектора в циліндричній системі координат, тобто з чотирма опорними елементами. Робота [3] присвячена дослідженню формоутворення зрівноважених сіток з планами у формі кільцевого сектора у яких крок вузлів у радіальному напрямку змінюється за експоненціальною залежністю. У роботі [4] було запропоновано спосіб дискретного моделювання одновимірних образів у полярній системі координат, які є плоскими елементами каркасу довільної просторової форми.

Проте зовсім не розглядалися задачі формування зрівноважених сіток, які в плані мають форму кругового сектора з трьома опорними елементами на контурі.

Метою роботи є розробка алгоритму формоутворення дискретно представлених зрівноважених сіток в циліндричній системі координат, план яких має форму кругового сектора.

Основна частина. Проекція поверхні в плані у формі кругового сектора розбивається на систему вузлів та зв'язків між ними таким чином, щоб утворилась регулярна сітка: в радіальному напрямку від 0 до R з кроком δ , в коловому – від 0° до ω з кроком ε (рис. 1).

Формується геометрично незмінна статично визначена система. Дуги замінюються хордами та здійснюється перехід до регулярної плоскої структури, яка складається з окремих стрижнів з'єднаних шарнірами (рис. 2). Для забезпечення її рівноваги, на контурі накладається необхідна кількість зв'язків та прикладаються відповідні сили. Враховуючи особливість кругового сектора, який, на відміну від кільцевого, містить особливу точку – полюс, потрібно по одному зв'язку накласти у вузлах одного з радіальних напрямків та два зв'язки у полюсі. Сітка розтягується в радіальному напрямку зусиллями R , а в коловому – зусиллями S_i .

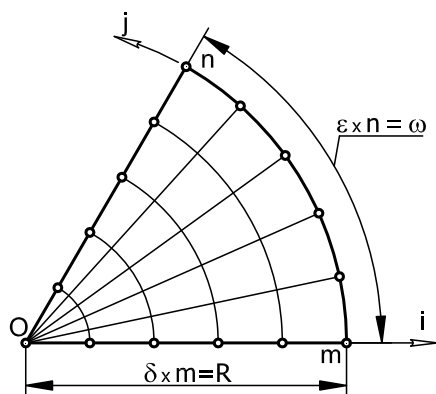


Рис. 1. Параметри регулярної структури в полярній системі

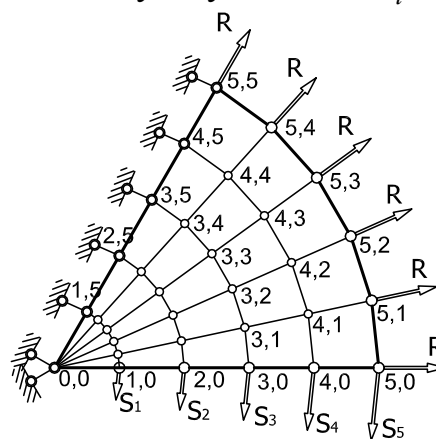


Рис. 2. Структура зрівноваженої сітки на площині

Нумерація вузлів та елементів у радіальному та коловому напрямках, розрізняється індексами r та φ відповідно. Горизонтальні проекції зусиль у стрижнях радіального напрямку позначаються $Nr(i, j)$, а колового – $N\varphi(i, j)$,

де i, j – номер першого вузла стрижня.

Під дією формоутворюючого навантаження в стрижнях просторової конструкції виникають зусилля, які проєціюються на горизонтальну та вертикальну площини, розкладаючись на дві складові.

Спочатку задача розв'язується на площині. За горизонтальною проєкцією моделі поверхні визначаються проєкції зусиль в стрижнях радіального і колового напрямку. Такий підхід дозволяє в подальшому розглядати рівновагу відповідних стрижнів у просторі.

Для визначення горизонтальних складових повного зусилля в елементах плоскої горизонтальної структури вирізається довільний вузол (i, j) і розглядається його рівновага в системі координат $i - t$ (рис. 3).

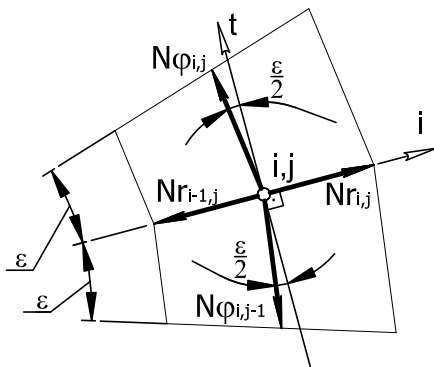


Рис. 3. Рівновага вузла (i, j) на площині

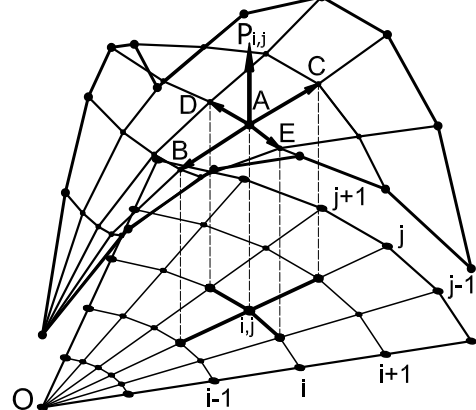


Рис. 4. Рівновага вузла (i, j) в просторі

Спроеціювавши усі сили на осі t та i (рис. 3), отримаємо:

$$N\varphi_{i,j} = N\varphi_{i,j-1}, \quad (1)$$

$$Nr_{i,j} = Nr_{i-1,j} + 2N\varphi_{i,j} \sin(\varepsilon/2), \quad (0 \leq i < m), \quad (0 \leq j < n). \quad (2)$$

Рівняння (2) являє собою рекурентну залежність між зусиллями в наступному та попередньому радіальних стрижнях, з якої визначається проєкція зусилля в довільному радіальному стрижні:

$$Nr_{i,j} = R + 2 \sin(\varepsilon/2) \sum_{k=0}^j S_k. \quad (3)$$

З рівності (1) слідує, що проєкція зусилля в довільному коловому стрижні знаходиться за формулою:

$$N\varphi_{i,j} = S_i, \quad (4)$$

де S_i – розтягуюче зусилля в i -му коловому напрямку.

Для визначення проєкцій зусиль на вертикальну площину у стрижнях радіального та колового напрямку, розглядаються дві пари зв'язків вузла (i, j) (рис. 4) та записується рівняння його рівноваги.

Для радіального стрижня з номером $(i-1, j)$, який з'єднує вузли $(i-1, j)$ та (i, j) (рис. 5) сума моментів усіх сил відносно точки B має вигляд:

$$\sum m_B(F) = 0, \quad -Nr_{i-1,j}(z_{i,j} - z_{i-1,j}) + Qr_{i-1,j}\delta = 0, \quad (5)$$

де δ – горизонтальна проєкція стрижня в радіальному напрямку;

$Qr_{i-1,j}$ – вертикальна складова зусилля в радіальному стрижні з номером $(i-1, j)$; $z_{i,j}$ – вертикальне переміщення вузла (i, j) .

З рівняння (5) визначається вертикальна складова зусилля $Qr_{i-1,j}$:

$$Qr_{i-1,j} = (1/\delta)Nr_{i-1,j}(z_{i,j} - z_{i-1,j}). \quad (6)$$

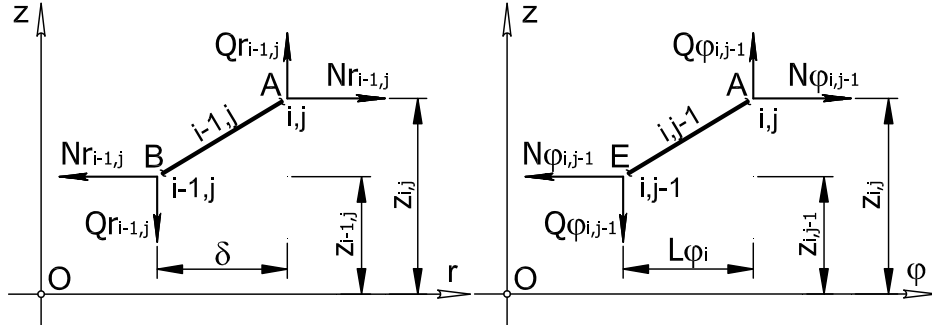


Рис. 5

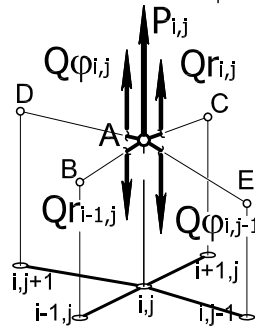


Рис. 6

Рис. 7

Аналогічно обчислюється $Qr_{i,j}$ в стрижні між вузлами (i,j) та $(i+1,j)$:

$$Qr_{i,j} = (1/\delta)Nr_{i,j}(z_{i+1,j} - z_{i,j}). \quad (7)$$

Для колового стрижня з номером $(i, j-1)$, який з'єднує вузли $(i, j-1)$ та (i, j) (рис. 6) сума моментів усіх сил відносно точки E має вигляд:

$$\sum m_E(F) = 0, \quad -N\phi_{i,j-1}(z_{i,j} - z_{i,j-1}) + 2i\delta \sin(\varepsilon/2)Q\phi_{i,j-1} = 0, \quad (8)$$

де $Q\phi_{i,j-1}$ – вертикальна складова зусилля в коловому стрижні.

З рівняння (8) визначається вертикальна складова зусилля:

$$Q\phi_{i,j-1} = \frac{N\phi_{i,j-1}}{2i\delta \sin(\varepsilon/2)}(z_{i,j} - z_{i,j-1}). \quad (9)$$

Аналогічно обчислюється $Q\phi_{i,j}$ в стрижні між вузлами (i,j) та $(i+1,j)$:

$$Q\phi_{i,j} = \frac{N\phi_{i,j}}{2i\delta \sin(\varepsilon/2)}(z_{i,j+1} - z_{i,j}). \quad (10)$$

Рівняння рівноваги вузла (i, j) (рис. 7) являє собою записане в не-явному вигляді скінченно-різницеve рівняння визначення його аплікати:

$$-Qr_{i-1,j} - Q\phi_{i,j-1} + Qr_{i,j} + Q\phi_{i,j} + P_{i,j} = 0. \quad (11)$$

Таким чином з умови рівноваги вузлів та стрижнів сітки, після підстановки в (11) складових зусиль (6), (7), (9) та (10), отримується скінченно-різницеve рівняння для визначення аплікати вузла (i, j) :

$$Nr_{i-1,j}z_{i-1,j} + \frac{S_i}{2i\sin(\varepsilon/2)}z_{i,j-1} - \left(Nr_{i-1,j} + \frac{S_i}{i\sin(\varepsilon/2)} + Nr_{i,j} \right) z_{i,j} + \frac{S_i}{2i\sin(\varepsilon/2)}z_{i,j+1} + Nr_{i,j}z_{i+1,j} + \delta P_{i,j} = 0, \quad (0 < i < m), \quad (0 < j < n). \quad (12)$$

Система лінійних скінченно-різницевих рівнянь виду (12), описує статико-геометричним методом дискретну модель зрівноваженої сітки з планом у формі кругового сектора.

Висновки. В роботі запропоновано алгоритм формоутворення дискретно представлених сіток в циліндричній системі координат з рівномірним кроком вузлів у радіальному та коловому напрямках, план яких має форму кругового сектора. Отримано скінченно-різницевий оператор для визначення статико-геометричним методом аплікату вузлів зрівноваженої сітки при довільному формоутворюючому навантаженні та заданому трьохелементному опорному контурі.

Література

1. Ковалёв С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / С.Н. Ковалёв // Дис. докт. техн. наук. 05.01.01 / М.: МАИ, 1986. – 348 с.
2. Пустюльга С.І. Формоутворення дискретно представлених поверхонь статико-геометричним методом в циліндричній системі координат / С.І. Пустюльга, В.П. Самчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2010. Вип. 84. – с. 285 - 291.
3. Пустюльга С.І. Дискретне моделювання поверхонь покриття з планами у формі кільцевого сектора / С.І. Пустюльга, В.П. Самчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2012. Вип. 90. – с. 286 - 292.
4. Пустюльга С.І. Формоутворення дискретних моделей кривих ліній статико-геометричним методом в полярній системі координат / С.І. Пустюльга, В.П. Самчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2010. Вип. 86. – с. 160 - 165.

ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОКРЫТИЯ С ПЛАНАМИ В ФОРМЕ КРУГОВОГО СЕКТОРА

В.П. Самчук

Работа посвящена исследованию формообразования двумерных образов с проекциями на горизонтальную плоскость в форме кругового сектора с равномерным шагом узлов на основе статико-геометрического метода моделирования проф. С.Н. Ковалёва.

**FORM CREATION THE DISCRETE REPRESENTATION OF THE
ROOF SURFACE WITH A PLAN IN FORM OF A CIRCULAR SECTOR**

V. Samchuk

The article is devoted to the study of formation of two-dimensional images with the projections on the horizontal plane in the form of a circular sector with a uniform spacing of nodes on the basis of statico-geometrical modeling method prof. S. Kovalov.