УДК 514.18 **В. І. Скочко,** к.т.н.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ОПИСУ РІВНОВАГИ ЕЛЕМЕНТІВ СІТЧАСТОЇ СТРУКТУРИ

Київський Національний Університет Будівництва і Архітектури

В роботі розкрито основні принципи побудови рівнянь рівноваги вузлів та стрижнів багатоланкової сітчастої конструкції, що перебуває під дією зовнішніх зосереджених сил.

Постановка проблеми. На сьогоднішній день питаннями розрахунку параметрів сітчастих структур активно займаються спеціалісти у багатьох галузях науки і техніки. Математичними моделями сітчастих структур описують цілий ряд багатопараметричних систем, процесів, явищ, та конструкцій, оскільки вони, у більшості випадків, дозволяють наочно та просто продемонструвати принципи та порядок взаємозв'язків між їх окремими елементами, даючи змогу проаналізувати загальну картину досліджуваного об'єкту чи процесу вцілому. Найбільш широко моделі сітчастих структур застосовуються у задачах чисельного комп'ютерного моделювання, а також при розв'язанні задач теоретичної, зокрема будівельної, механіки.

Постановка більшості з зазначених задач вимагає пошуку різноманітних параметрів в'язей сітчастих інтерпретаційних структур, при умові, що відомими є топологічні особливості моделі та крайові й початкові умови при різних параметрах стану в її вузлах. Існують й обернені задачі, що потребують відтворення параметрів стану за заданими властивостями та відомими властивостями в'язей.

Перша із зазначених задач представляє найбільший інтерес у зв'язку з її прикладним характером, а відтак потребує детального розгляду та поглибленого аналізу шляхів її вирішення. Відтак, цікавим є пошук загальних принципів опису статичного та динамічного станів сітчастих структур.

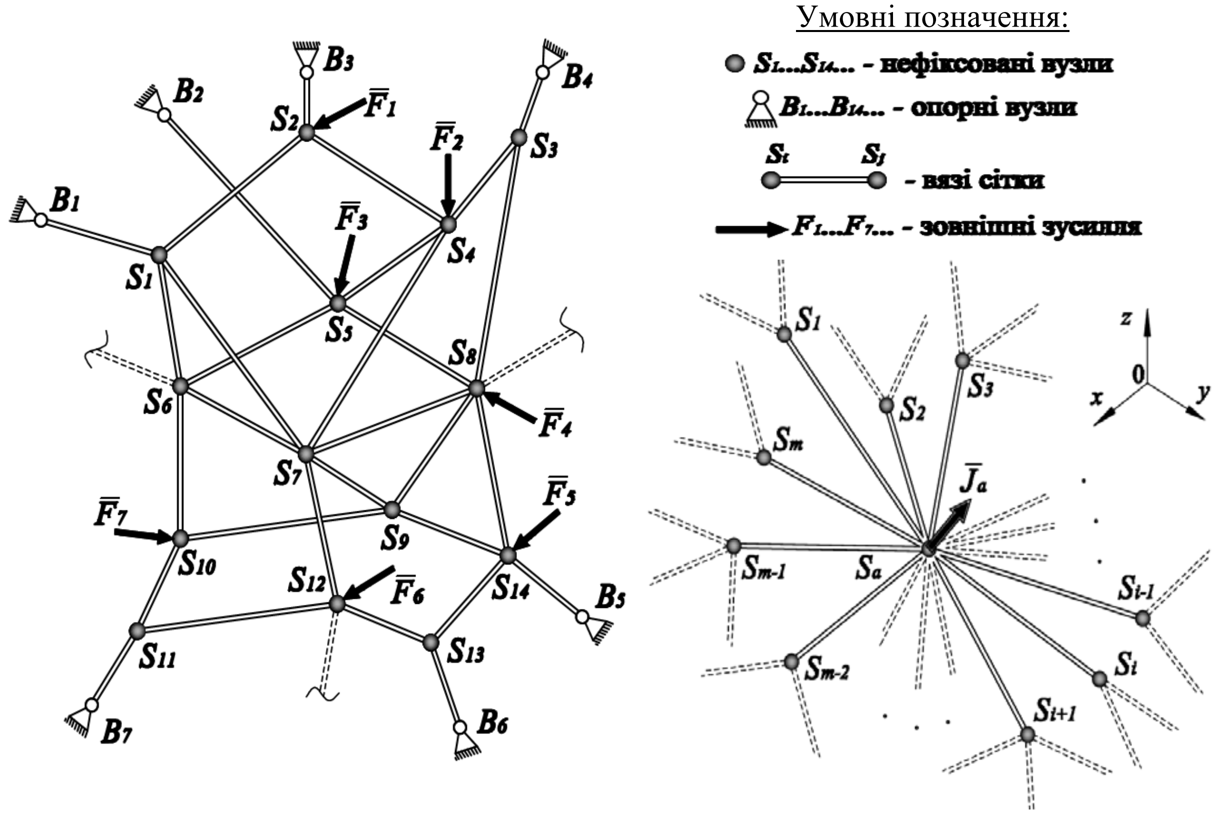
Аналіз основних досліджень. Проблема визначення параметрів в'язей сітчастих систем є у достатній мірі висвітленою в дослідженнях стрижневих та вантових будівельних конструкцій, в задачах підбору вагових коефіцієнтів в'язей нейромереж, а також пошуку оптимальних параметрів електричних гідротехнічних та вентиляційних систем [1,3,4]. Однак, за виключенням урахування топологічних ознак, усі ці задачі сильно різняться за шляхами пошуку невідомих величин, оскільки мають фундаментальні відмінності у закономірностях, що описують взаємодію між вершинами інтерпретаційних сіток. Єдиним спільним принципом в усіх підходах до вирішення перерахованих задач є прийняття умови мінімізації відхилень від допустимих величин параметрів вузлів системи (варіаційний принцип) [5]. Це дає змогу характеризувати поточні стани системи, як аналоги станів статичної рівноваги топологічно еквівалентної стрижневої конструкції, зрівноваженої сторонніми силами, які інтерпретують вплив зовнішніх факторів.

Основна частина. Розглянемо просторову тривимірну модель деякої конструкції представлену в формі довільної сітки, що знаходиться в стані статичної рівноваги, під дією деяких зовнішніх сил. Якщо аналізувати цю конструкцію, як систему, з точки зору механіки, то запропонована сітка складатиметься з трьох основних елементів (рис. 1.а.):

1) опорних вузлів, які фіксуватимуть усю систему та забезпечуватимуть її зв'язок із навколишнім середовищем;

2) вільних або нефіксованих вузлів, що в залежності від зовнішніх сил займатимуть те чи інше положення в просторі;

3) в’язів, які з’єднуватимуть опорні та проміжні вузли і, в залежності від заданих параметрів жорсткості, спричинятимуть відповідні деформації системи у цілому.



а) б)

Рис. 1.: а) фрагмент довільної просторової сітки; б) довільний вузол просторової сітки

Зазначимо, що усі сторонні сили, які діятимуть на сітку, сприйматимуть лише її нефіксовані вузли – шарнірні з’єднання. Таке твердження використовуватимемо для того, щоб виключити можливість виникнення поперечних зусиль, а також згинальних та скрутних моментів у в’язях.

Якщо необхідно визначити напружено-деформований стан (НДС) деякої сітки (або стрижневої конструкції) під дією заданого сталого навантаження, то, з математичної точки зору, така задача зводиться до розрахунку координат її вільних вузлів, а також визначення внутрішніх зусиль, які діють у в'язях. В такому випадку початковими або крайовими умовами являються координати опорних вузлів та параметри жорсткості в'язей сітки. Під параметром жорсткості розумітимемо відношення величини абсолютного зусилля, що діє у даній в'язі, до довжини цієї в'язі. Так для деякої в'язі, що сполучає нефіксовані вузли просторової сітки S_i та S_j, параметр жорсткості становитиме:

$$\aleph_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j}\ , \qquad (1)$$

де $R_{i,j}$ і $\delta_{i,j}$ – це абсолютна величина зусилля, діючого у в'язі, та її довжина.

Для того, щоб прослідкувати математичну залежність між геометрією в'язі, її положенням у просторі та зусиллям, яке діє у ній, розглянемо деяку окрему в'язь просторової сітки між двома довільними вузлами S_i та S_j.

Якщо вважати, що абсолютна величина зусилля у в'язі S_iS_j становить $R_{i,j}$, то сам вектор цього зусилля можна представити у наступній формі:

$$\overline{R}_{i,j} = R_{i,j} \cdot \cos\theta \cdot \bar{i} + R_{i,j} \cdot \cos\zeta \cdot \bar{j} + R_{i,j} \cdot \cos\xi \cdot \bar{k}\,. \qquad (2)$$

Тут $\cos\theta$, $\cos\zeta$, та $\cos\xi$ – це косинуси кутів, що вектор $\overline{R}_{i,j}$ утворює із осями координат. Вони становлять:

$$\cos\theta = \left(x_j - x_i\right) / \delta_{i,j}\,, \quad (3) \qquad \cos\zeta = \left(y_j - y_i\right) / \delta_{i,j}\,, \quad (4) \qquad \cos\xi = \left(z_j - z_i\right) / \delta_{i,j}\,. \quad (5)$$

З урахуванням формул (3) – (5) та (1), рівність (2) можна переписати в такому вигляді:

$$\overline{R}_{i,j} = \aleph_{i,j} \cdot \left(x_j - x_i\right) \cdot \bar{i} + \aleph_{i,j} \cdot \left(y_j - y_i\right) \cdot \bar{j} + \aleph_{i,j} \cdot \left(z_j - z_i\right) \cdot \bar{k}, \text{ або}$$
$$\overline{R}_{i,j} = \aleph_{i,j} \cdot \left\{\left(x_j - x_i\right) \cdot \bar{i} + \left(y_j - y_i\right) \cdot \bar{j} + \left(z_j - z_i\right) \cdot \bar{k}\right\}. \qquad (6)$$

Вираз (6) встановлює залежність між геометрією, параметром жорсткості та зусиллям, яке виникає у в'язі, проте, не дає жодного уявлення про стан статичної рівноваги системи (інтерпретованої сіткою) у цілому.

У відповідності із основними положеннями класичної статичної механіки зрівноважений стан довільної просторової сітки (або стрижневої конструкції) цілком описується системою рівнянь, кожне з яких відображає рівновагу окремих вузлів цієї системи. Інакше кажучи, векторна сума зусиль, які приходять до деякого окремо розглянутого вузла, має дорівнювати нулю. В цю суму мають входити сили від зовнішніх впливів та внутрішні зусилля, що виникають у в'язях, які сполучають усі суміжні із даним вузли.

Підкреслимо, що характер роботи в'язі визначається (або задається) знаком показника жорсткості $\aleph$. Це випливає з форми запису виразу (6). Таким чином, якщо стержень працює на розтяг, то показник жорсткості має знак «+», якщо на стиск – «–».

Розглянемо стан статичної рівноваги деякого a-го вузла, який належить довільній тривимірній сітці і сполучається із m суміжними вузлами (рис. 1.б.). Позначатимемо усі вільні вузли літерами S із відповідними до нумерації індексами ($1, 2, \dots i\text{–}1, i, i+1, \dots m\text{–}1, m$). Скориставшись описаною вище методикою вирізання вузлів, запишемо векторну суму зусиль, якими можна замінити відсічені в'язі, та прикладені ззовні навантаження на даний вузол:

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{R}_{a,i} + \overline{J}_a = 0 . \qquad (7)$$

Тут $\overline{J}_a$ – рівнодійна усіх сторонніх сил прикладених до даного вузла.

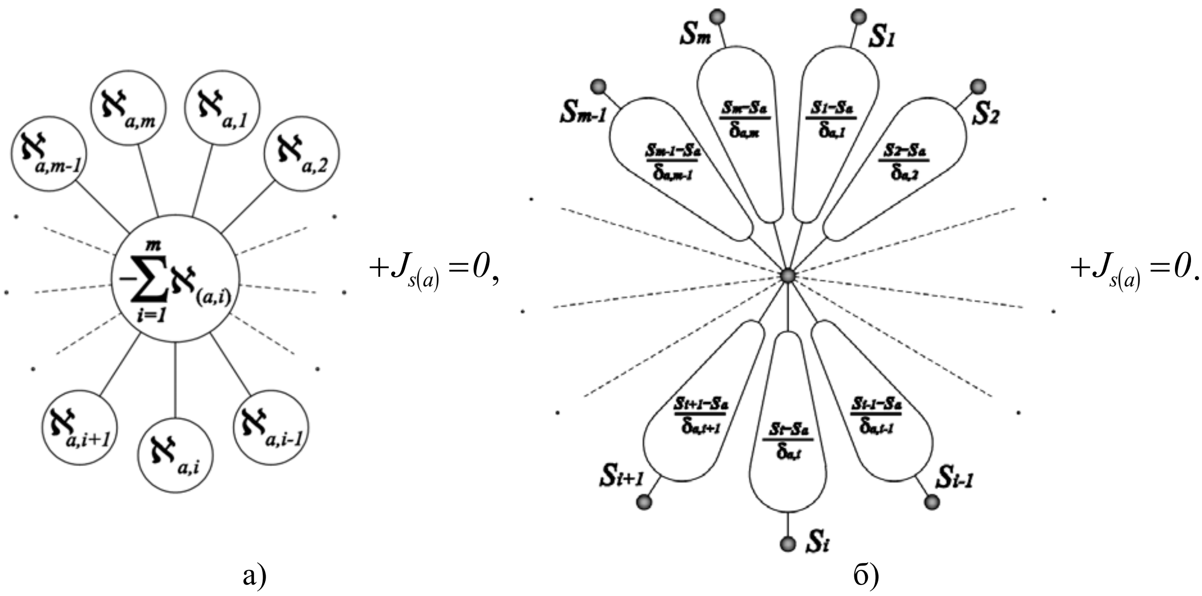
Спроектуємо векторні величини, що входять до рівності (7), на координатні осі. Одержимо наступну систему:

$$\sum_{i=1}^{m} (s_a - s_i)\cdot R_{a,i} / \delta_{i,j} + J_{s(a)} = 0 \text{, або} \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\aleph_{(a,i)} \cdot s_i\right] - s_a \cdot \sum_{i=1}^{m} \aleph_{(a,i)} + J_{s(a)} = 0 . \qquad (9)$$

Тут s – узагальнене позначення декартових координат.

Останню рівність можна наочно представити у формі обчислювального шаблона (рис. 2.а.).



а) б)

Рис. 2. Обчислювальні шаблони, що описують рівновагу довільного вузла сітки: а) шаблон для підстановки координат; б) шаблон для підстановки внутрішніх зусиль

Рівняння рівноваги (9) представляє собою узагальнену форму запису тотожностей статико-геометричного методу формування дискретних образів. Цей метод є одним із потужних інструментів прикладної геометрії, так як дає змогу моделювати роботу багатьох просторових об'єктів архітектури, зокрема тонкостінних, стрижневих, вантових конструкцій та різноманітних оболонок покриття, враховуючи їх фізичні властивості та міру впливу на них [6].

Систему (8) також можна відобразити у формі шаблону (рис. 2.б.). Проте в даному випадку вершини шаблонів із зазначеними коефіцієнтами слід «накладати» не на вузли, а на в'язі із відповідними при їх кінцях індексами. Таким чином, одержимо нову форму шаблону, виконання рівності якого, забезпечується підстановкою абсолютних величин внутрішніх зусиль у відповідних стрижнях.

Очевидно, що складання системи рівнянь типу (9) для кожного незакріпленого вузла, та її розв'язання відносно координат, при умові що параметри жорсткості задані, повністю визначає форму усього образу. При цьому обернену задачу з визначення величин внутрішніх зусиль у стрижні можна вирішити, розв'язавши систему рівнянь типу (8) відносно шуканих сил, за умови, що положення усіх вузлів визначене. Однак, це можливо лише у випадку, коли кількість в'язей дорівнює кількості вільних вузлів системи. Для того, щоб вирівняти кількість рівнянь і невідомих зусиль, слід розглядати стан статичної рівноваги усієї в'язі.

Розглянемо окрему в'язь просторової стрижневої системи, що перебуває у стані статичної рівноваги під дією зовнішніх сил. Позначимо дану в'язь S_aS_b. Припустимо, що вузол S_a загалом сполучається m стрижнями із m суміжними вузлами (останні позначатимемо S'_i, де $i=1,2,\dots m$). Нехай вузол S_b у сумі сполучається n стрижнями із n суміжними вузлами (вузли суміжні із S_b позначатимемо S''_j, де $j=1,2,\dots n$). Проте, якщо виключити із числа суміжних два вузли (S_a для S_b та S_b для S_a), які є кінцями досліджуваного стрижня, то кількість «другорядних» суміжних вузлів, для S_a становитиме $m-1$, а для S_b дорівнюватиме $n-1$. Інакше кажучи будуть справедливими вирази: $S_a \equiv S''_n$ та $S_b \equiv S'_m$. Вважатимемо, що на вузли S_a та S_b даної в'язі діють рівнодійні усіх зовнішніх зусиль $\bar{J}_a$ та $\bar{J}_b$ відповідно (рис. 3.).

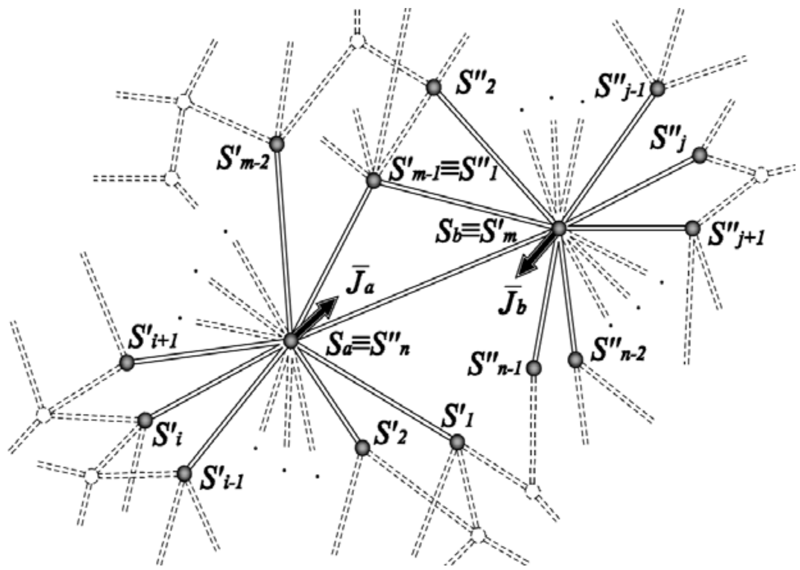


Рис. 3. Довільна в'язь просторової сітки

<u>Примітка</u>: не слід виключати можливість того, що вузли S_a і S_b можуть мати множину спільних суміжних вузлів не враховуючи самих себе. Більше того, можливий випадок, при якому усі суміжні вузлів точок S_a і S_b будуть спільними. Співпадати, також, можуть окремі координати суміжних вузлів. На рисунку спільними суміжними вузлами являються вузли S'_{m-1} та S''_1.

Виріжемо досліджувану в'язь $S_a S_b$, замінивши відсічені суміжні з обома вузлами стрижні і замінивши їх на відповідні вектори внутрішніх зусиль, які виникають у цих стрижнях внаслідок впливу сторонніх (зовнішніх) сил. У відповідності до «принципу вирізання», сума векторів усіх зовнішніх сил, прикладених до вирізаної області, та внутрішніх зусиль має дорівнювати нулю:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \bar{R}_{a,i} + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{R}_{b,j} + \bar{J}_a + \bar{J}_b = 0 . \qquad (10)$$

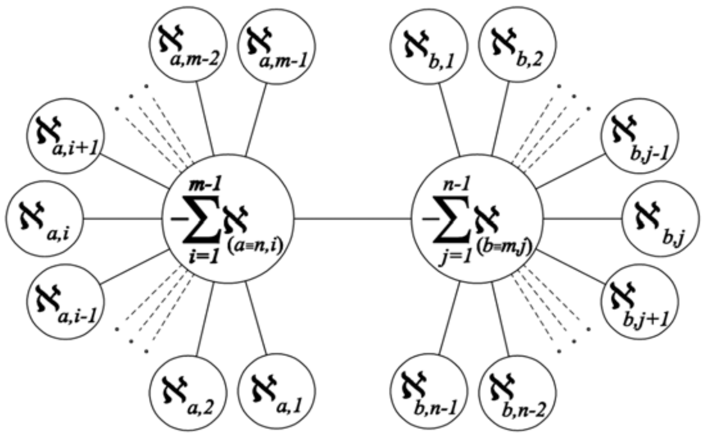
Спроектуємо усі векторні величини, що входять до рівності (10), на координатні осі. Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left(s_a - s_i\right) \cdot R_{a,i} / \delta_{a,i} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(s_b - s_j\right) \cdot R_{b,j} / \delta_{b,j} + J_{s(a)} + J_{s(b)} = 0 \text{, або} \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left[\aleph_{(a,i)} \cdot s_i\right] - s_a \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \aleph_{(a,i)} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\aleph_{(b,j)} \cdot s_j\right] - s_b \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \aleph_{(b,j)} + J_{s(a)} + J_{s(b)} = 0 . \qquad (12)$$

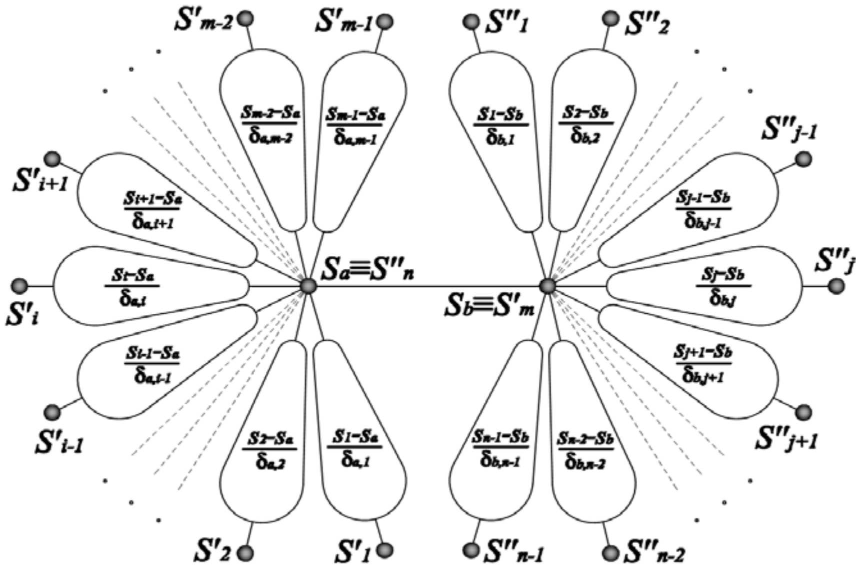
Обчислювальні шаблони для систем (11) та (12) показані на рисунку4.

а)



$+ J_{s(a)} + J_{s(b)} = 0$,

б)



$+ J_{s(a)} + J_{s(b)} = 0$.

Рис. 4. Обчислювальні шаблони, що описують рівновагу в'язей сітки:
а) шаблон для підстановки координат; б) шаблон для підстановки внутрішніх зусиль

Найбільший інтерес представляє система (11), оскільки розв'язання її рівнянь, складених для усіх в'язей сітчастої структури, дасть змогу визначити внутрішні зусилля в цих в'язях, при умові, що кількість в'язей не перевищує сумарної кількості вільних і базових вузлів. Однак, слід пам'ятати, що реакції опор у закріплених (нерухомих) вузлах мають бути заздалегідь визначеними. Причому, якщо до одного опорного вузла приєднано дві чи більше в'язей, слід визначати компоненти загальної реакції опори, віднесені до кожної з цих в'язей.

Окрім того, за наявності в системі в'язей або зовнішніх сил, паралельних координатним осям, не усі рівняння системи (11) даватимуть можливість коректно визначати величини внутрішніх сил. Для усунення даного недоліку доцільно просумувати всі три тотожності системи (11) й одержане рівняння скласти для кожної в'язі сітки. Дане рівняння матиме наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[\left(x_a-x_i\right)+\left(y_a-y_i\right)+\left(z_a-z_i\right)\right]\cdot R_{a,i}/\delta_{a,i}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(x_b-x_j\right)+\left(y_b-y_j\right)+\left(z_b-z_j\right)\right]\cdot R_{b,j}/\delta_{b,j}+\sum_{s=x,y,x}\left(J_{s(a)}+J_{s(b)}\right)=0\,. \tag{13}$$

Аналогічну операцію доцільно виконувати і з рівняннями системи (12). Додавши зазначені рівності одержимо:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[\aleph_{(a,i)}\cdot\left(x_i+y_i+z_i\right)\right]-\left(x_a+y_a+z_a\right)\cdot\sum_{i=1}^{m-1}\aleph_{(a,i)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\aleph_{(b,j)}\cdot\left(x_j+y_j+z_j\right)\right]-\left(x_b+y_b+z_b\right)\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\aleph_{(b,j)}+\sum_{s=x,y,z}\left(J_{s(a)}+J_{s(b)}\right)=0\,. \tag{14}$$

Додамо також, що недоліки систем рівнянь (13) та (14) (як і рівнянь (11) та (12)), спричинені необхідністю відповідності кількості стрижнів числу усіх вузлів (вільних і базових), пов'язані з математичною природою цих рівнянь. Справа в тому, що кожне з них може бути одержане шляхом додавання рівнянь рівноваги вузлів, сполучених відповідною в'яззю. А значить, перевищення числа рівнянь рівноваги вузлів сітки кількістю рівнянь рівноваги стрижнів, веде до того, що матриця коефіцієнтів усієї системи рівнянь (при її матричному представленні) буде виродженою [2], а сама система не вирішуватиметься.

Система рівнянь (13) у матричній формі для всіх стрижнів має наступну форму:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}\,, \tag{15}$$

де $\boldsymbol{A}$ – матриця коефіцієнтів, $\boldsymbol{R}$ – вектор стовпець невідомих внутрішніх зусиль, а $\boldsymbol{B}$ – вектор стовпець компонентів зовнішніх впливів та крайових умов.

Підкреслимо, що матриця коефіцієнтів системи (15) $\boldsymbol{A}$ має нульову діагональ, а це перешкоджає можливості застосування методу простих ітерацій при розв'язанні цієї системи.

Усі перераховані недоліки значно ускладнюють застосування системи рівнянь типу (13) для визначення внутрішніх зусиль у стрижнях сітки. Окрім того, окрему увагу слід звертати на необхідність визначення опорних реакцій системи, а також на принципи побудови рівнянь рівноваги в’язей, що містять опорні вузли.

Відтак, необхідно вдаватися до таких математичних операцій, які б дозволили замінювати діагональні елементи матриці коефіцієнтів на ненульові.

Необхідно підкреслити, що продемонстрований спосіб вирізання вузлів наочно показує основні принцип побудови рівнянь стану статичної рівноваги елементів сітчастої структури. Топологія й природа обчислювальних шаблонів ілюструє можливість застосування аналогічного принципу й для інших видів задач, пов’язаних із моделюванням сітчастих структур. Такий підхід можна успішно застосовувати не лише при розв’язанні задач теоретичної або будівельної механіки, а й задач підбору невідомих параметрів сітчастих конструкцій при умові, що а ні координати вузлів, а ні параметри в’язей не є відомими, зокрема при побудові дискретних образів різноманітних ізоповерхонь або поверхонь, рівняння яких задане у неявній формі. При цьому доцільно спиратися на диференціальні закономірності між фізичними та геометричними параметрами сітчастих структур, представлені в [7].

Висновки. Продемонстрований у роботі принцип вирізання в’язей сітчастої структури відображає можливість опису не лише статичної рівноваги вузлів конструкції, а й окремих її фрагментів. Даний принцип у поєднанні із загальними диференційними закономірностями між геометричними та фізичними параметрами використовуваних моделей та законами розподілу зовнішніх впливів доцільно застосовувати при вирішенні як прямих й зворотних, так і комплексних задач, пов’язаних із пошуком параметрів та оптимізацією стрижневих структур, та процесів, які можуть бути ними інтерпретовані.

Література

1. *Рабинович И. М.* Курс строительной механики стержневых систем. Часть 2. Статически неопределимые системы. Издание 2-е. перераб. / *И. М. Рабинович*. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 548 с., ил.

2. *Ланкастер П.* Введение в теорию матриц / *П. Ланкастер*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 280 с.

3. *Haykin S.* Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Second Edition / *Simon Haykin*. – New Jersey: by Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2006. – 1105 p.

4. *Зевеке Г. В.* Основы теории цепей. Учебник для вузов. Изд. 4-е, переработанное / *Г. В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов.* –

М: «Энергия», 1975. – 752 с., ил.
5. *Coulomb J.-L.* CAO an electrotechnique / *Jean-Louis Coulomb, Jean-Claude Sabonnadiere*. – Praise, 1985. – 208р.
6. *Ковалёв С. Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / *С. Н. Ковалёв* // Дис. … доктора техн. наук. 05.01.01. – М.: МАИ, 1986. – 348 с.
7. *Скочко В. І.* Диференціальні закономірності між геометричними і фізичними параметрами сітчастих структур та полів, що їх врівноважують / *В. І. Скочко, Л. О. Скочко* // Основи і фундаменти. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 33. – В друці.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОПИСАНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СЕТЧАТОЙ СТРУКТУРЫ

В.И. Скочко

В работе раскрыты основные принципы построения уравнений равновесия узлов и стержней многосвязной сетчатой конструкции, которая находится под действием внешних концентрированных сил.

SOME ASPECTS OF THE NETWORK STRUCTURE'S ELEMENTS BALANCE DESCRIPTION

Volodimir I. Skochko

This article describes the main principles of construction of equilibrium equations of nodes and cores multiply grid structure, which is under the influence of concentrated external forces.