УДК 515.2

І.С. Табакова, викладач

ПОБУДОВА ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЛІНІЇ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ, НАЛЕЖНИХ ДАНІЙ ГЛАДКІЙ ПОВЕРХНІ

Харківський національний університет радіоелектроніки

Наведено оснований на варіаційних принципах спосіб опису та побудови геодезичної лінії, яка сполучає дві точки гладкої поверхні

Постановка проблеми. Сучасний мобільний робот - це складна механічна система, здатна сенсорно сприймати навколишнє середовище й аналізувати її стан для здійснення автономної навігації й керованого руху до місця виконання конкретних завдань. Інтегрована система навігації має розпізнавати й моделювати навколишнє середовище. При цьому одним з головних компонентів керування рухом є визначення напрямку обходу конкретної перешкоди на площині [1].

В даній роботі розглянуто планування маршруту руху мобільного робота по обходу перешкоди, що базується на використанні геодезичної лінії. Особливістю запропонованого підходу є моделювання перешкоди за допомогою гладкої поверхні обертання, на основі опису, побудови та аналізу геодезичних на цій поверхні. Ця задача є базовою для побудови алгоритму гладкого керування траєкторним рухом мобільного робота в середовищі з перешкодами, які апроксимуються гладкими поверхнями з горизонтальними перетинами, подібними овалу. Плоску топографічну карту з наявністю перешкод пропонується представити як неплоску поверхню, заміняючи перешкоди гладкими умовними «пагорбами». Зазначимо, що при цьому можна врахувати різні витрати ресурсів при проїзді по вільним від перешкод зонам, що характеризують, наприклад, асфальт, грунт, пісок, траву, заболочені місцевості, тощо. Для цього на цій неплоскій топографічній карті ці зони необхідно задати додатковими «пагорбами» й «западинами», що буде здійснено в подальшому.

Для обраного подання топографічної карти траєкторію можна визначити аналітичними або чисельними методами. Для цього необхідно розробити способи розв'язання поставленого завдання за допомогою геодезичних ліній [2].

На даному етапі розроблено спосіб визначення та побудови геодезичної кривої, яка б з'єднала дві точки, розташовані на заданій поверхні. Зазначимо, що у механіці геодезична лінія відіграє важливу роль: по ній рухається точка, що повинна залишатися на поверхні в тому випадку, коли на точку не діють ніякі зовнішні сили.

Аналіз відомих досліджень. Якщо поставлено завдання знайти найкоротшу лінію на поверхні між заданими на цій поверхні двома точками, то шуканою лінією буде частина геодезичної лінії, що проходить через ці точки. Обернений висновок не завжди справедливий, тому що іноді частина геодезичної лінії, що проходить через дві задані на поверхні точки, укладена між цими точками, може не бути найкоротшою.

Чисельний алгоритм знаходження наближеного положення геодезичної на заданій поверхні розглянуто у роботі [3] і полягає у такому.

1. У якості вихідних даних на поверхні обирається «стартова» точка й початковий напрямок геодезичної лінії.

2. В обраній точці обчислюється нормаль до поверхні.

3. Визначається проекція вектора напрямку на площину, задану нормаллю.

4. Здійснюється зміщення на величину Δ уздовж знайденого вектора, спроектованого на нормаль з урахуванням напряму на «фінішну» точку.

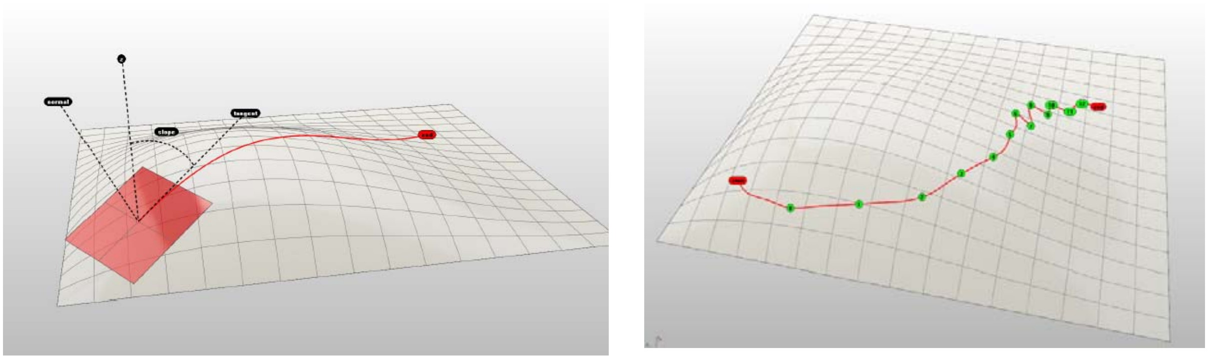
5. Використовуючи функцію обчислення відстані визначається точка на поверхні, найближча до розрахункової точки.

6. Одержуємо нормаль до поверхні в цій точці.

7. При необхідності все повторити, розпочинаючи з пункту 3.

8. В результаті одержують наближене положення геодезичної на поверхні.

В роботі [3] наведено приклад побудови геодезичної (рис. 1).



Конструктивні елементи алгоритму　　　　　　Результат побудови

Рис. 1. Приклад побудови геодезичної

Але більш точну побудову можна здійснити за допомогою системи диференціальних рівнянь, що описують геодезичну. При цьому зазначимо, що існує два різновиди побудови геодезичної на поверхні залежно від обраних крайових умов [4]. У першій постановці геодезична лінія будується за даними «стартовою» точкою і початковим напрямком. У другій (більш складній) постановці геодезична лінія будується за даними «стартовою» і «фінішною» точками. В даній роботі наведено розв’язання задачі побудови геодезичної лінії у другій постановці.

Постановка завдання. Розробити оснований на варіаційних принципах спосіб опису та побудови геодезичної лінії, яка сполучає дві точки на гладкій поверхні.

Основна частина. Прямий спосіб розв’язання задачі побудови геодезичної лінії на поверхні $G(x, y, z) = 0$ в прямокутних координатах зводиться до знаходження розв’язків двох диференціальних рівнянь геодезичної лінії:

$$\begin{aligned}&\left[d\left(dx/ds\right)\right]/\left(dG/dx\right)=\\&\left[d\left(dy/ds\right)\right]/\left(dG/dy\right)=\\&\left[d\left(dz/ds\right)\right]/\left(dG/dz\right),\end{aligned}\qquad(1)$$

де $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$.

До аналогічних диференціальних рівнянь прийдемо, якщо потрібно знайти найкоротшу лінію на поверхні між двома точками на цій поверхні.

Але на практиці для знаходження геодезичних зручніше використовувати варіаційні методи, де простіше можна поєднати аналітичні вирази і геометричну форму об’єктів дослідження.

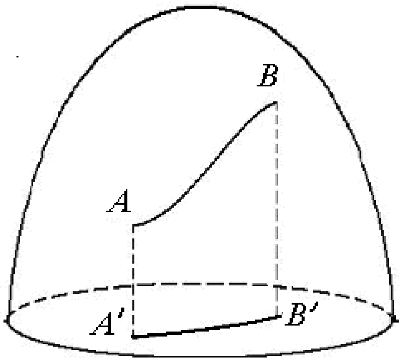


Рис.2. Умовний «пагорб»

Розглянемо точки *A* і *B* на поверхні умовного «пагорба» (рис. 2). Серед всіх кривих, які ми можемо провести на цій поверхні із точки *A* в точку *B*, існує одна найкоротша – яка називається геодезичною. Один зі способів визначення геодезичної є обчислення її проекції на площину *Oxy*. Рівняння проекції *A'B'* разом з рівнянням поверхні цілком визначають геодезичну лінією.

Нехай рівняння поверхні умовного «пагорба» є $z=F(x,y)$. Тоді, якщо параметрам x і y надати прирости dx і dy, то параметр z одержить приріст $dz=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$. Отже, для елемента довжини дуги ds маємо:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dx^2+dy^2\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy\right)^2. \qquad (2)$$

Припустимо, що точки *A* і *B* з'єднані довільною кривою, проекція якої на площину *Oxy* є *y = y(x).* Тоді довжина кривої дорівнює:

$$s=\int_{x0}^{x1}\frac{ds}{dx}dx=\int_{x0}^{x1}\sqrt{1+y'^2\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'\right)^2}\,dx\,. \qquad (3)$$

Для визначення геодезичної необхідно відшукати мінімум інтеграла (3), що не є простою задачею обчислювального характеру.

Інший варіант варіаційної постановки задачі. Нехай неплоска робоча зона виражається функцією $z=F(x,y)$, де z – «висота» даної точки траєкторії; x і y – декартові координати проекції точки поверхні на площину.

Потрібно мінімізувати функціонал $T = \int_{x_S}^{x_E} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{F(x,y)} dx$ з такими граничними умовами: $y(x_S) = y_S$; $y(x_E) = y_E$, де x_S і y_S - декартові координати «стартової» точки; x_E і y_E - декартові координати кінцевої (цільової) точки.

При знаходженні екстремуму функціонала, вимога, щоб шукана крива мала явне рівняння $y = y(x)$ може істотно звузити завдання, тому що може виявитися, що прямі, паралельні осі y, перетинають криву - розв'язок, більш ніж в одній точці. Для запобігання цього перетворимо наш функціонал у вигляд з параметричним завданням шуканої кривої:

$$T = \int_{x_S}^{x_E} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}}{F(x,y)} x'dt \tag{4}$$

з граничними умовами $x(0) = x_S$; $y(0) = y_S$; $x(t_E) = x_E$; $y(t_E) = y_E$.

Розв'язання цього завдання зводиться до знаходження розв'язку системи двох диференціальних рівнянь 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} W x'' + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x'} W x' + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x'} W - \frac{\partial}{\partial x} W = 0\,; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2} W y'' + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y'} W y' + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial y'} W - \frac{\partial}{\partial y} W = 0\,,$$

що також не є простою задачею обчислювального характеру, адже тут через W позначено підінтегральний вираз (4), тобто $W = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}}{F(x,y)} x'$.

На практиці зручнішим є варіант постановки задачі про геодезичну лінію з використанням рівнянь Ейлера-Лагранжа. Вона дозволяє визначити лінію найменшої довжини на поверхні $G(x, y, z) = 0$, що з'єднує точки $A(a, p)$ і $B(b, p)$. Для розвязання слід врахувати довжину просторової кривої, описаної рівняннями $y = y(x)$ і $z = z(x)$, $a \le x \le b$, яка визначається інтегралом

$$s(y,z) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx\,. \tag{6}$$

Будуємо функцію Лагранжа з множником $\lambda(x)$:

$$w = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\, G(x, y, z)\,. \qquad (7)$$

Для визначення екстремалі одержуємо систему вигляду рівняння Ейлера-Лагранжа з множником $\lambda(x)$:

$$\lambda(x)\, G_y - \frac{d}{dy}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0\,; \quad \lambda(x)\, G_z - \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0 \qquad (8)$$

яку слід розвязати з урахуванням рівняння зв'язку $G(x, y, z) = 0$ і граничних умов.

Було складено Maple програму опису та побудови геодезичної лінії, розташованої на заданій гладкій поверхні, яка виходить із «стартової» точки і прямує до «фінішної» точки.

Спочатку виконуються підключення потрібних бібліотек:

```
with(plots); with(VariationalCalculus);
```

Для прикладу обрано поверхню f = sin(x)*sin(y):

```
f := (x, y) => sin(x)*sin(y);
```

Здійснюється унаочнення поверхні:

```
p[1] := plot3d(f(x, y), x = -7..7, y = -7..7,
     style=surface, lightmodel = light1, axes = box,
     orientation = [-55, 65]); p[1];
```

Довжину дуги обчислимо інтегралом $\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$, де параметр t змінюється уздовж кривої, і $z(t) = f(x(t), y(t))$. Оскільки радикал обов'язково відмінний від нуля, то можна одержати геодезичну, мінімізуючи інтеграл, підінтегральний вираз якого має вигляд:

```
F := (diff(x(t),t))^2 + (diff(y(t),t))^2 +
     (diff(f(x(t),y(t)),t))^2;
```

Це можна здійснити шляхом розв’язання системи диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0\,; \qquad F_y - \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} = 0\,. \qquad (9)$$

Зазначене доцільно реалізувати такими операторами мови Maple:

```
ELK := EulerLagrange(F, t, [x(t), y(t)]);
EL := remove(has, ELK, K);
q[1] := collect(EL[1], diff);
q[2] := collect(EL[2], diff);
```

Далі необхідно задати координати «стартової» і «фінішної» точок:

```
Xs := -5; Ys := -3; Xe := 5; Ye := 0;
```

В доповнення до самих рівнянь Ейлера-Лагранжа команда EulerLagrange з пакету VariationalCalculus може забезпечити перші інтеграли, в яких константи інтеграції мають форму K_n. У програмі вилучаються перші інтеграли, які розв'язуються чисельно:

```
M := dsolve({q[1],q[2],x(0)=Xs, x(1)=Xe,
      y(0)=Ys, y(1)=Ye}, {x(t), y(t)},
      numeric, abserr = 0.1e-3);
```

Остаточно одержується зображення розв'язку у вигляді графіка рівнянь Ейлера-Лагранжа на поверхні. Для сумісного зображення геодезичної і поверхні «піднімемо» лінію на величину z = 0.05 так, щоб вона була більш помітною.

```
p[3] := odeplot(M, [x(t),y(t),f(x(t), y(t))+0.5e-1],
     t = 0..1, color = black, thickness = 3);
display([p[1], p[3]], labels = [x, y, z]);
```

На рис. 3 наведено приклади виконання розробленої програми залежно від положення «стартової» або «фінішної» точки для поверхні f = sin(x/1,5)*sin(y/1,5).

На рис. 4. наведено аналогічні приклади виконання програми для поверхні $f = 4\sin(x/2)\cos(3y/5) + 2\sin(x)\cos(y)$.

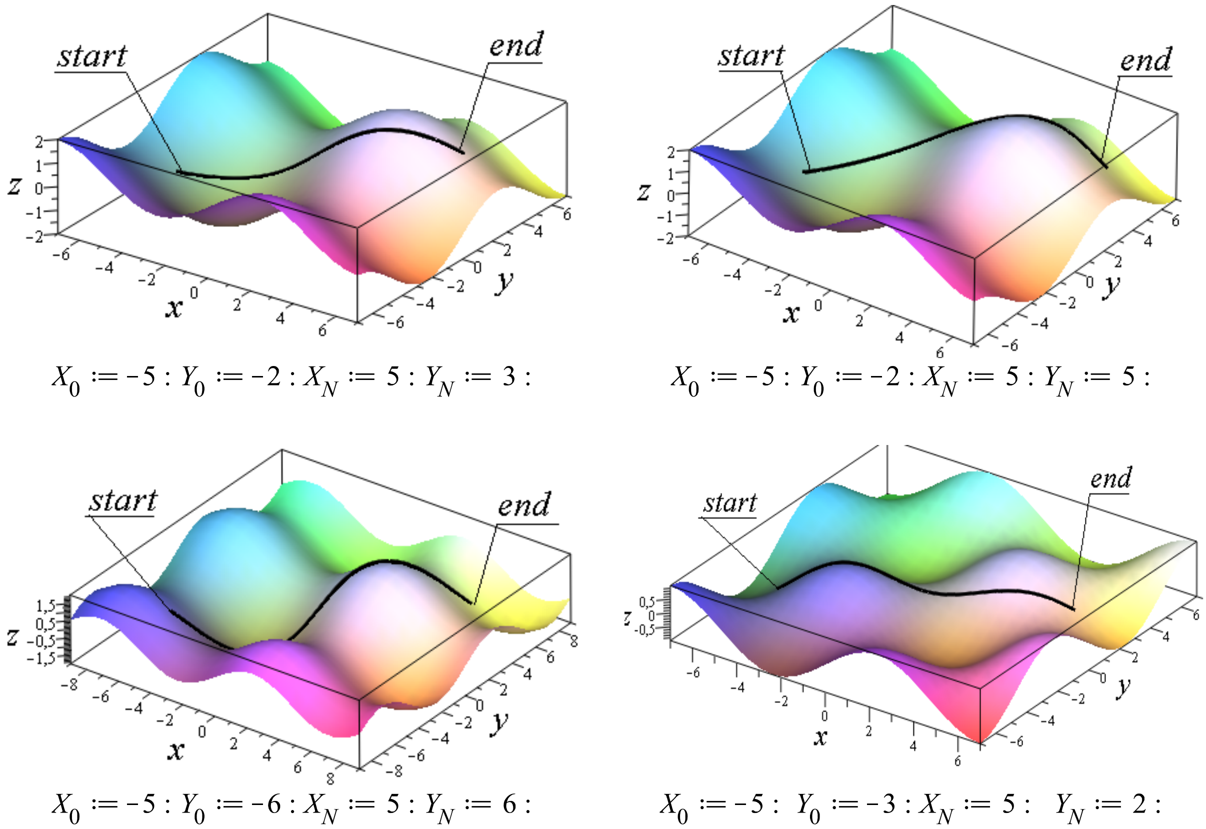


Рис. 3. Приклади виконання програми для поверхні f = sin(*x*/1,5)*sin(*y*/1,5).

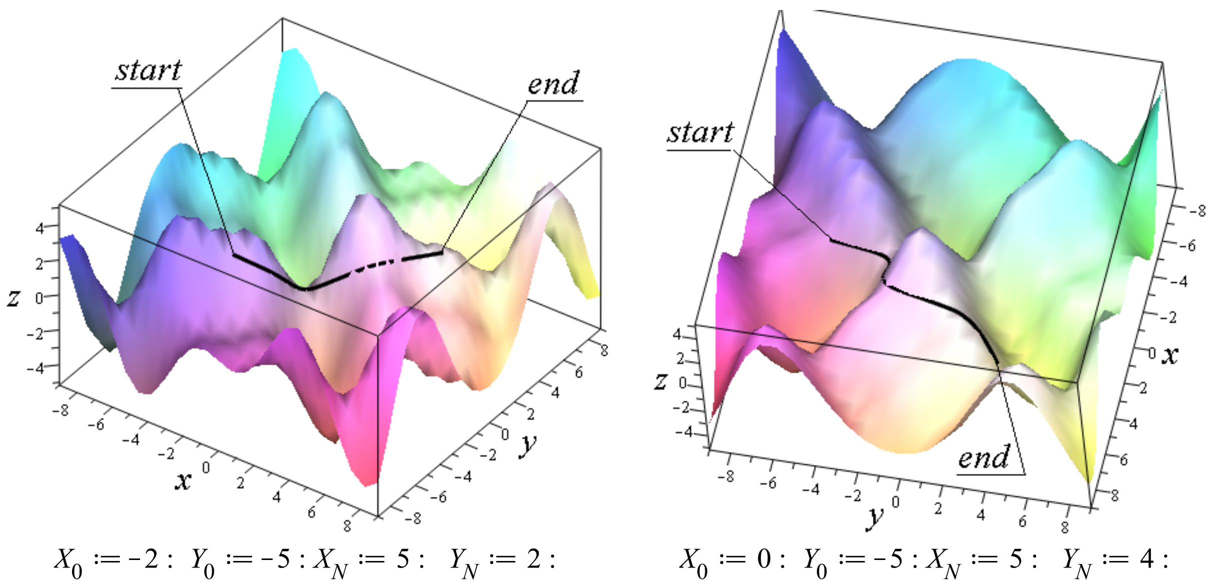


Рис. 4. Приклади виконання програми для поверхні $f = 4\sin(x/2)\cos(3y/5) + 2\sin(x)\cos(y)$

Висновок. Алгоритм руху по неплоскій поверхні на основі опису та побудови геодезичної лінії має крім надійності результату ще й значну перевагу, що в ньому можна врахувати різні коефіцієнти прохідності робота по конкретним ділянкам площини.

Література

1. *Табакова І.С.* Визначення необхідних та можливих напрямів обходу перешкод на шляху руху робота. / *І.С. Табакова* // Сучасні проблеми геометричного моделювання. СПГМ-15, Мелітополь: ТДАТУ, 2013. -С. 172-176.
2. Геодезические линии на поверхностях. Составители: *Жукова Н.И., Багаев А.В.* Учебно-методическое пособие. — Н. Новгород : Издательство Нижегородского госуниверситета. — 2008. – 54 с.
3. Ресурс. Режим доступу http://wooj.files.wordpress.com/2012/06/vb-workshop-harvard-gsd-spring-2012.pdf
4. *Гликлих Ю. Е.* О двухточечной краевой задаче для уравнений геодезических. / *Ю.Е.Гликлих, П.С.Зыков // Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, выпуск 4, с. 65–70*
5. *Wang S., Wang F., Du X.* A method for solving the shortest path on curved surface based on PSO-SA algorithm. - Journal of Theoretical and Applied Information Technology. - December 2012. Vol. 46, No.2, p. 672-676
6. *Kochetkov S.A., Utkin V.A.* A trajectory stabilization algorithm for mobile robot // The Proceedings of 11-th International Workshop on Variable Structure systems (VSS2010). Mexico, 2010. PP. 121–127.

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ, ПРИНАДЛЕЖАЩИМИ ДАННОЙ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И.С. Табакова

Приведено основанный на вариационных принципах способ описания и построения геодезической линии, которая соединяет две точки гладкой поверхности

CREATION OF THE GEODETIC LINE BETWEEN TWO THE POINTS, BELONGING TO THIS SMOOTH SURFACE

I. Tabakova

It is provided the way of the description based on the variation principles and creation of the geodetic line which connects two points of a smooth surface.