УДК 514.765.2 **П.О.Тадеєв,** к.ф.-м.н, проф.*,
О.А.Кравчук, ст. викладач**

МОДЕЛЮВАННЯ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ЗОВНІШНІХ ФОРМ

** Національний університет водного господарства та природокористування, м.Рівне, Україна*
*** Хмельницький національний університет, м.Хмельницький, Україна*

У статті проаналізовано ефективність використання методу зовнішніх форм Е. Картана у прикладних геометричних дослідженнях. Для ілюстрації доцільності цього методу досліджується з його використанням векторні поля у n-вимірному афінному просторі. Паралельно з цим вводяться основні положення, які є базовими у методі зовнішніх форм Е. Картана: зовнішня форма, зовнішній диференціал, деривайційні рівняння, рівняння структури та рухомий репер.

Актуальність і постановка проблеми. При моделюванні геометричних образів користуються як класичними так і сучасними методами. Наприклад, при моделюванні векторних полів найчастіше використовуються класичні методи: векторний аналіз і теорія поля, теорія функцій комплексної змінної, теорія гіперкомплексних чисел, теорія кватерніонів, тощо. У сучасних умовах при дослідженні векторних полів свою ефективність продемонстрував метод тривекторного числення.

Однак метод зовнішніх форм Е. Картана, який показав свою ефективність при дослідженні многовидів (кривих, поверхонь, конгруенцій та комплексів), до цього часу майже не використовується у прикладних геометричних дослідженнях. Це в однаковій мірі стосується також дослідження векторних полів за допомогою зазначеного методу.

При цьому порівняння простих обчислень для рухомих реперів вказує на значні переваги при використанні методу зовнішніх форм Е. Картана. Особливо яскраво це проявляється при пошуку інваріантів досліджуваних геометричних образів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Метод зовнішніх форм Е. Картана ефективно застосовується починаючи з 30-х років XX століття при побудові класичних розділів диференціальної геометрії кривих і поверхонь. С. Бюшгесу вдалося ефективно використати цей метод при дослідженні векторних полів у тривимірному евклідовому просторі [2]. У прикладних геометричних дослідженнях цей метод вперше використала М. Гребенюк при дослідженні трискладових розподілів [1]. При цьому за основу взято узагальнення методу Е. Картана розроблене російським дослідником Г. Лаптєвим [3].

Мета статті. Окреслити можливість використання методу зовнішніх форм Е. Картана у прикладних геометричних дослідженнях на прикладі моделювання поверхонь та векторних полів у тривимірному евклідовому просторі. Нами побудовано основи диференціальної геометрії векторного поля в *n*-вимірному афінному просторі [4; 5].

Викладення основного матеріалу. Наведемо приклад геометричних конструкцій, які приводять до лінійних диференціальних форм. З цією метою розглянемо у якості вихідного простору тривимірний евклідів простір, віднесений до нерухомого реперу $(O, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$. Знайдемо рівняння, які описують зміну деякого рухомого реперу $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Позначимо координати рухомого початку та координати рухомих базисних векторів через $A(x^i)$, $\vec{e}_i(\alpha_i^j)$. Тоді: $\vec{A} = x^i E_i$, $\vec{e}_i = \alpha_i^j E_j$, *i, j, k*=1,2,3. Припускаючи, що $\det\left|\alpha_i^j\right| \neq 0$ одержимо: $E_i = \beta_i^j e_j$ $(\beta_i^k \alpha_k^j) = \delta_i^{ji})$. Звідки $d\overline{A} = x^i E_i = \beta_j^i dx^j \vec{e}_i = \omega^i e_i$, $d\vec{e}_i = da_i^j E_j = \beta_k^j d\alpha_i^k \vec{e}_j = \omega_i^j e_j$, $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$. Форми виду

$$\omega^i = \beta_j^i dx^j, \tag{1}$$

$$\omega_i^j = \beta_k^j d\alpha_i^k. \tag{2}$$

називаються лінійними диференціальними формами або формами Пфаффа.

З'ясуємо які умови накладаються на лінійні форми ω^i та ω_j^i. Нехай d і δ - два символи диференціювання, які володіють тією властивістю, що $d\delta x^i = \delta dx^i$. Очевидно звідси випливає, що $d\delta\vec{A} = \delta d\vec{A}$, $d\delta\vec{e}_i = \delta d\vec{e}_i$. Розписавши останні співвідношення детальніше отримаємо

$$d\omega^i(\delta) - \delta\omega^i(d) = \omega^j(d)\omega_j^i(\delta) - \omega^j(\delta)\omega_j^i(d) = \begin{vmatrix} \omega^j(d) & \omega^j(\delta) \\ \omega_j^i(d) & \omega_j^i(\delta) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$d\omega_j^i(\delta) - \delta\omega_j^i(d) = \omega_j^k(d)\omega_k^i(\delta) - \omega_j^k(\delta)\omega_k^i(d) = \begin{vmatrix} \omega_j^k(d) & \omega_j^k(\delta) \\ \omega_k^i(d) & \omega_k^i(\delta) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Ліві частини співвідношень (3) і (4) називаються білінійними коваріантами Фробеніуса та позначаються наступним чином:

$$\Omega^i(d,\delta) = d\omega^i(\delta) - \delta\omega^i(d),\ \Omega_j^i(d,\delta) = d\omega_j^i(\delta) - \delta\omega_j^i(d).$$

Праві частини співвідношень (3) і (4) представимо у вигляді

$$\left[\omega^j \omega_j^i\right] = \begin{vmatrix} \omega^j(d) & \omega^j(\delta) \\ \omega_j^i(d) & \omega_j^i(\delta) \end{vmatrix},\ \left[\omega_j^k \omega_k^i\right] = \begin{vmatrix} \omega_j^k(d) & \omega_j^k(\delta) \\ \omega_k^i(d) & \omega_k^i(\delta) \end{vmatrix}.$$

і назвемо зовнішніми добутками лінійних форм ω^j та ω_j^i і ω_j^k та ω_k^i відповідно. Враховуючи наведені міркування співвідношення, (3) і (4) можна представити у наступному вигляді:

$$D\omega^i = \left[\omega^j \omega_j^i\right], \tag{5}$$

$$D\omega_j^k = [\omega_j^k \omega_k^i]. \qquad (6)$$

де символ D - зовнішній диференціал від лінійної форми. Співвідношення (5) і (6) називають рівнянням структури евклідового простору.

Оскільки у подальшому ми будемо мати справу з лінійними диференціальними формами виду $\omega^i = \beta_j^i dx^j$, то визначимо поняття зовнішнього добутку двох мономів dx^i та dx^j цієї форми.

<u>Означення.</u> Зовнішнім добутком двох мономів dx^i та dx^j називається відповідність при якій упорядкованій парі цих мономів співставляється символ (позначається $[dx^i dx^j]$) так, що виконуються наступні властивості:

1. $$[dx^i [dx^j dx^k]] = [[dx^i dx^j] dx^k], \qquad (7)$$
2. $$[dx^i (dx^j + dx^k)] = [dx^i dx^j] + [dx^i dx^k], \qquad (8)$$
3. $$[(dx^i + dx^j) dx^k] = [dx^i dx^k] + [dx^j dx^k], \qquad (9)$$
4. $$[dx^i dx^j] = -[dx^j dx^i] \qquad (10)$$

Якщо $\omega^1 = \beta_j^1 dx^j$ і $\omega^2 = \beta_j^2 dx^j$, то зовнішній добуток цих форм має вигляд:

$$[\omega^1 \omega^2] = \beta_i^1 \beta_j^2 [dx^i dx^j] \qquad (11)$$

Для вираження однієї системи лінійних форм через іншу використовується наступна лема:

<u>Лема Картана</u>: Якщо дві системи лінійних форм Ω_i та ω^i $(i = \overline{1,n})$підпорядковані тотожностям $[\Omega_1 \omega^1] + [\Omega_2 \omega^2] + \ldots + [\Omega_n \omega^n] = 0$, а форми ω^i - лінійно незалежні , то форми Ω_i лінійно виражаються через ω^i із симетричною матрицею коефіцієнтів, тобто $\Omega_i = a_{ij}\omega^i$, $(a_{ij} = a_{ji})$.

<u>Означення.</u> Зовнішнім диференціалом лінійної форми $\omega^i = \beta_j^i dx^j$ називається вираз виду

$$D\omega^i = [d\beta_j^i dx^j] \qquad (12)$$

Безпосередньо перевіряються наступні властивості зовнішнього диференціалу

$$Ddf = 0 \qquad (13)$$

$$DD\omega = 0 \qquad (14)$$

$$D(\omega^1 + \omega^2) = D\omega^1 + D\omega^2 \qquad (15)$$

$$D(f \cdot \omega) = [df \cdot \omega] + fD\omega \qquad (16)$$

У співвідношеннях (13) та (16) f - довільна функція.

Проілюструємо використання методу зовнішніх форм Картана для знаходження диференціальних рівнянь, що моделюють векторне поле у *n*-вимірному афінному просторі.

1. Дериваційні рівняння афінного простору відносно A_n рухомого реперу $(\vec{A},\vec{e}_\alpha)$ мають вигляд

$$d\vec{A} = \omega^\alpha \vec{e}_\alpha \ , \ d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta \ , \ \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,n} \qquad (17)$$

Лінійні форми Пфаффа задовольняють рівнянням структури простору A_n:

$$D\omega^\alpha = \left\lfloor \omega^\beta \omega_\beta^\alpha \right\rfloor, \ D\omega_\beta^\alpha = \left\lfloor \omega_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha \right\rfloor \qquad (18)$$

Означення. Векторним полем в A_4 називається відповідність, при якій кожній точці A цього простору співставлений певним чином визначений вектор $\vec{a} \in V$.

Не зменшуючи загальності можемо вважати, що початок вектора $\vec{a}$ співпадає з кінцем вектора $\vec{A}$. Це означає, що $\delta A = 0$ і форми ω^α є головними.

Якщо вектор $\vec{a}$ відносно базису $(\vec{e}^\alpha)$ має координати (a^α) то вони задовольняють диференціальному рівнянню

$$da^\alpha + a^\beta \omega_\beta^\alpha = a_\beta^\alpha \omega^\beta \qquad (19)$$

Продовжуючи рівняння (19) одержимо

$$da_\beta^\alpha = a_\gamma^\alpha \omega_\beta^\gamma - a_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha + a_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma, \text{ де } a_{\beta\gamma}^\alpha = a_{\gamma\beta}^\alpha \qquad (20)$$

Продовжуючи диференціальні рівняння (20) одержимо послідовність фундаментальних об'єктів $\left\{a^\alpha, a_j^\alpha, a_{j\gamma}^\alpha, a_{j\gamma\delta}^\alpha, \ldots\right\}$, яка лежить в основі диференціальної геометрії векторного поля в афінному просторі A_n.

Означення. Векторне поле називається регулярним, якщо $\det\left|a_\beta^\alpha\right| \neq 0$.

Це дозволяє ввести в розгляд величини

$$b_\alpha^\gamma a_\gamma^\beta = \delta_\alpha^\beta, \qquad (21)$$

диференціальні рівняння яких мають вигляд

$$db_\alpha^\beta + b_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha - b_\gamma^\alpha \omega_\beta^\gamma = b_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma \qquad (22)$$

2. Поля інваріантних лінійних геометричних об'єктів, пов'язаних з векторним полем.

А. Поле точок. Диференціальні рівняння інваріантності поля точок $\vec{P} = \vec{A} + x^\alpha \vec{e}_\alpha$ мають вигляд

$$dx^\alpha + x^\beta \omega_\beta^\alpha = x_\beta^\alpha \omega^\beta \qquad (23)$$

Побудуємо згортку тензорів a^α, a_β^α

$$N^\alpha = a_\beta^\alpha a^\beta. \qquad (24)$$

Диференціальне рівняння цієї згортки має вигляд (23)

$$dN^\alpha + N^\beta \omega_\beta^\alpha = N_\beta^\alpha \omega^\beta. \qquad (25)$$

Точка $\vec{N}=\vec{A}+N^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ є інваріантною. Для регулярного поля розглянемо згортку

$$M^{\alpha}=b^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}. \qquad (26)$$

Диференціальне рівняння цієї згортки має вигляд (23)

$$dM^{\alpha}+M^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta}=M^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta}. \qquad (27)$$

Точка $\vec{M}=\vec{A}+M^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ також є інваріантною.

В. Поле прямих.

Пряму, яка проходить через точку A з направленим вектором $\vec{R}$ позначимо через $l=\left[A,\vec{R}\right]$. Якщо вектор $\vec{R}=r^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$, то умови інваріантності прямої будуть мати вигляд

$$\delta r^{\alpha}+r^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta}=r^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} \qquad (28)$$

Очевидно, що прямі $l_1=\left[A,\vec{N}\right]$ і $l_2=\left[A,\vec{M}\right]$ є інваріантними.

Твердження. В диференціальному околі першого порядку існує дві інваріантні прямі, які визначаються тензорами N^{α} і M^{α}.

Отже, схема дослідження многовидів, занурених у деякий простір, що здійснюється методом зовнішніх форм Е. Картана, складається з таких етапів:

- вихідний простір визначається певною системою залежностей між деякими лінійними формами (ці залежності називаються рівняннями структури простору);
- задається занурений многовид (крива, поверхня, векторне поле, розподіл тощо) системою лінійних залежності між виділеними лінійними формами;
- система рівнянь зануреного многовиду продовжується шляхом послідовного зовнішнього диференційювання з використанням леми Картана;
- будуються всі можливі геометричні об‘єкти, в тому числі тензори і квазітензори, охоплені фундаментальними об‘єктами;
- вивчаються одержані охвати та зв‘язки між ними.

Таким чином, метод зовнішніх форм Е. Картана є доволі універсальним методом моделювання геометричних образів, а його використання значно спрощує процедуру пошуку інваріантних об’єктів цих образів, що знаходить застосування у прикладних геометричних дослідженнях.

В роботі за допомогою зовнішніх форм Е.Картана та інваріантного методу Г.Ф.Лаптєва побудовано основи диференціальної геометрії векторного поля в n-вимірному афінному просторі. Визначені інваріантні точки, прямі та гіперплощіни. Дослідження проводиться в довільному репері.

Література

1.Гребенюк М.Ф. Інтерпретація трискладових розподілів та теорія геометричних перетворень : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук : спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» / М.Ф. Гребенюк. – К. : 2003.

2.Бюшгес С.С. Геометрия векторного поля / С. Бюшгес // М. : Изд. АН СССР, 1948. – (Серия математика; т. 10, №1).

3.Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г. Ф. Лаптев. // Труды Моск. матем. о-ва : сб. ст. 1953. – Т. 2. – С.275-382.

4.Тадеєв П.О. До геометрії векторного поля n-вимірного афінного простору. /П.Тадеєв, О. Кравчук. // Вісник Київського національного університету / Серія фізико-математичні науки, 2006. В.4. – с.61-69

5.Тадеєв П.О. До питання про канонічний репер, приєднаний до векторного поля чотиривимірного афінного простору А4./П. Тадеєв, О. Кравчук//Праці Таврійської держ. агротехнічної академії. Прикладна геометрія та інженерна графіка.Т.36.Мелітополь, 2007 В.4. – с.92-98.

6.Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. ОГИЗ ГИТТЛ, М.Л. 1998, 432 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВНЕШНИХ ФОРМ

П.О.Тадеєв, О.А.Кравчук

В статье проанализирована эффективность использования метода внешних форм Э. Картана в прикладных геометрических исследованиях. Для иллюстрации целесообразности этого метода исследуется с его использованием векторные поля в n-мерном аффинном пространстве. Параллельно с этим вводятся основные положения, которые являются базовыми в методе внешних форм Э. Картана: внешняя форма, внешний дифференциал, деривационные уравнения, уравнения структуры и подвижный репер.

MODELING VECTOR FIELDS ON THE BASIS OF EXTERNAL FORM

P.Tadaev, O.Kravchuk

The article deals with the analysis of methods of E. Kartan outer forms usage expediency in applied geometric investigation. For expediency of this method illustration the space and vector fields in three dimensional Euclidean space have been used. Some basic positions in E. Kartan methord of outer forms have been introduced parallelly: outer form, outer differential, derivational equations, structural equation and moving reper.