

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ГРУНТА ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛОПАТКИ РОТОРНОГО ГРУНТОМЕТАТЕЛЯ

*Харьковский национальный университет строительства и архитектуры
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
Национальный университет гражданской защиты Украины*

Построена математическая модель движения частицы грунта по шероховатой поверхности пространственной лопатки роторного грунтометателя. Используются уравнения динамики относительного движения в форме уравнений Лагранжа первого рода. Поверхность лопатки формируется из брахистохрон, найденных для поля центробежных сил инерции, с использованием двумерной кубической сплайн-интерполяции.

Постановка проблемы. Работы, направленные на модернизацию технологии грунтометания при ликвидации низовых пожаров в условиях отсутствия воды чрезвычайно важны. Существующие конструкции грунтометательных механизмов недостаточно совершенны [1 - 4]. Рядом достоинств обладают роторные грунтометатели [2 - 6], которые грунт в зону возгорания выбрасывают с помощью лопаток, расположенных на вращающемся роторе. От формы лопаток существенно зависят технологические характеристики устройств. Рациональный их выбор в значительной степени зависит от достоверности моделей, которые используются для исследования движения частицы грунта по шероховатой поверхности пространственной лопатки. Указанные задачи моделирования имеют актуальный характер.

Анализ основных исследований и публикаций. В работе [7] создана модель для изучения движения частицы грунта по прямолинейной лопатке, необходимая для выбора рациональных параметров грунтометателя с такими лопатками. Моделированию движения частиц грунта по криволинейным (оптимальным) лопаткам, днище которых выполнено по форме брахистохроны, полученной для поля центробежных сил инерции [8], посвящены статьи [9, 10] Перспективным представляется использование в грунтометателях пространственных лопаток [11]. Исследования по моделированию движения частиц грунта по ним в настоящее время отсутствуют.

Постановка задачи. Для пространственной лопатки грунтометательного механизма, поверхность которой формируется с помощью брахистохроны для центробежной силы инерции

поступательным перемещением ее плоскости, либо поступательным перемещением с соответствующим поворотом, построить математическую модель движения частицы грунта, учитывающую наличие сил трения.

Основная часть. На рис. 1 показана схема грунтометателя: 1 – ступица; 2 – кольцо; 3 – спица; 4 – криволинейная лопатка. Предполагается, что метатель вращается с угловой скоростью ω против хода часовых стрелок. Радиусы R_1 и R_2 представляют собой радиусы окружностей, проходящих через заднюю и переднюю кромки лопатки.

Описание поверхности пространственных лопаток. В работе [11] предложены методы построения пространственных лопаток, поверхности которых таковы, что траектории движения частиц по ним близки к брахистохонам для поля центробежных сил инерции, т.е. близки к оптимальным. Типичная форма такой лопатки представлена на рис. 2. Жирной кривой на внутренней поверхности лопатки показана “базовая” брахистохона, поступательным перемещением плоскости которой, либо поступательным перемещением с поворотом на соответствующий угол (на рис. 3 – угол ϑ) в ее плоскости и формируется поверхность. Основания брахистохрон располагаются при этом на подходящей дуге (на рис. 2 – дуга полуокружности). Заметим, что поступательное перемещение базовой кривой с соответствующим поворотом позволяет сохранить у этой кривой свойства брахистохроны [11].

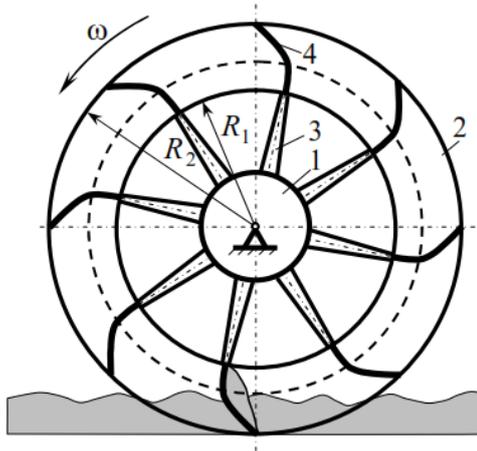


Рис. 1. Схема грунтометательного механизма

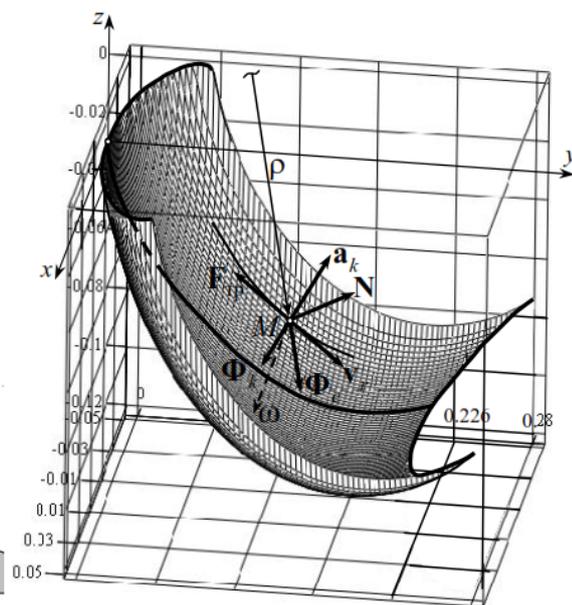


Рис. 2. Пространственная лопатка, сформированная из брахистохрон

Анализ движения частиц грунта удобно осуществлять в декартовой системе координат. На рис. 2, 3 начало правой системы координат (точка O) помещено в начальную точку “базовой” брахистохроны; ось z имеет

направление полярного радиуса, т.е. направлена к оси ротора; ось y – к периферии ротора; ось x параллельна оси ротора (на рис. 3 не показана; предполагается, что она направлена на читателя). Выбор ее обусловлен тем, что одной из важнейших характерных особенностей оптимальной кривой является то, что полярный радиус, проходящий через ее начальную точку, представляет собой касательную к кривой в этой точке. Физически это означает, что на начальном этапе движения сила (центробежная сила инерции) близка к направлению движения, т.е. обеспечивает максимальное ускорение, что не возможно при использовании прямолинейной лопатки (случай, когда прямолинейная лопатка расположена вдоль радиуса, не удовлетворителен с технологической точки зрения).

Поверхности лопаток

$$z = p(x, y) \quad (1)$$

в статье [11] строились с использованием средств двумерной кубической сплайн-интерполяции MathCAD. Важным обстоятельством с точки зрения дальнейших исследований движения частиц грунта по лопатке является то, что полученные таким способом функции $z = p(x, y)$ в среде MathCAD можно аналитически дифференцировать, как и традиционные функции.

Силы, действующие на частицы грунта. На указанных рисунках частица грунта M изображена в произвольном текущем положении с координатами (x, y, z) . Будем полагать, что в плоскости, проходящей через точку M и параллельной плоскости Oyz , положение ее определяется полярными координатами (ρ, ψ) (начало соответствующей системы координат находится на оси ротора [11]).

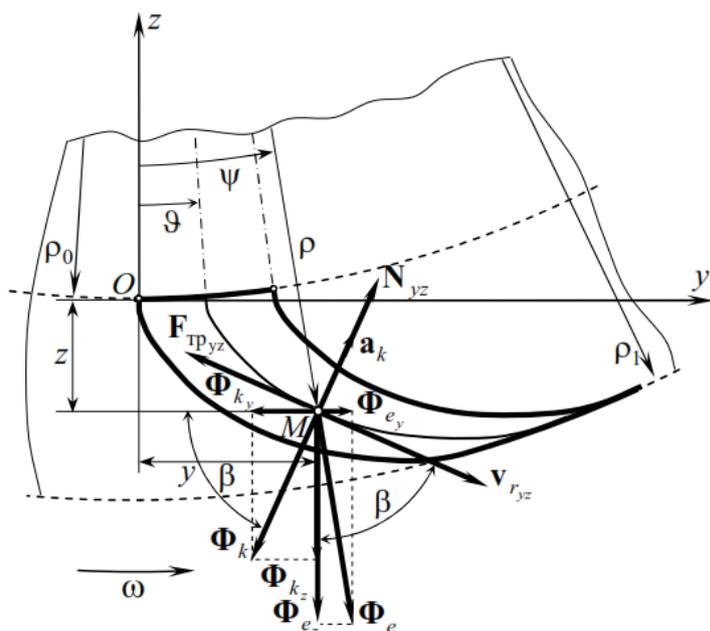


Рис. 3. Схема для записи уравнений движения частицы грунта по лопатке

В изложенной ниже теории радиусам R_1 и R_2 соответствуют полярные радиусы ρ_0 и ρ_1 .

Специфика задачи состоит в том, что движение точки (частицы грунта) целесообразно изучать в подвижной (вращающейся) системе координат, что возможно с использованием уравнений динамики относительного движения.

На рис. 2 приняты следующие обозначения: \mathbf{v}_r – относительная скорость; $\mathbf{a}_k = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ – кориолисово ускорение; Φ_e – переносная (центробежная) сила инерции; Φ_k – кориолисова сила инерции; \mathbf{N} – нормальная реакция лопатки; $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения (направлена против относительной скорости); $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости ротора грунтотметателя.

Выражения для модуля силы Φ_e и ее проекции на направление полярного радиуса совпадают

$$\Phi_e = \Phi_{e\rho} = ma_\omega = m\omega^2\rho, \quad (2)$$

где m – масса частицы грунта; $a_\omega = \omega^2\rho$ – осестремительное (нормальное) ускорение.

Для кориолисовой силы инерции имеет место формула

$$\Phi_k = -ma_k, \quad (3)$$

а для ее модуля с учетом выражения для кориолисова ускорения выражение

$$\Phi_k = 2m\omega v_{r_{yz}}, \quad (4)$$

где $v_{r_{yz}}$ – модуль проекции относительной скорости на плоскость Oyz .

Из определений переносной и кориолисовой сил инерции следует, что они лежат в одной плоскости, параллельной Oyz .

По закону Кулона для сухого трения сила трения пропорциональна нормальной реакции:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -Nf \frac{\mathbf{v}_r}{v_r}, \quad (5)$$

где f – коэффициентом трения скольжения; N – модуль нормальной реакции; v_r – модуль относительной скорости точки.

Влияние сил тяжести на движение точки для рассматриваемых параметров устройств и угловых скоростей незначительно, поэтому здесь они не учитываются. Принципиальные осложнения для их учета отсутствуют.

Для удобства записи дифференциальных уравнений на рис. 3 введен ряд важных дополнительных обозначений (фактически на этом рисунке показана профильная проекция лопатки – проекция на плоскость Oyz):

$\mathbf{v}_{r_{yz}}$, \mathbf{N}_{yz} , $\mathbf{F}_{\text{тр}yz}$ – соответственно проекции относительной скорости,

нормальной реакции и силы трения на плоскость Oyz ; Φ_{e_y} , Φ_{e_z} , Φ_{k_y} , Φ_{k_z} – составляющие переносной и кориолисовой сил инерции по осям y и z ; β – угол между $\mathbf{v}_{r_{yz}}$ и направлением параллельным оси z .

Полярный радиус текущего положения точки M (см. рис. 3)

$$\rho = \sqrt{(\rho_0 + z)^2 + y^2}, \quad (6)$$

модуль переносной силы инерции

$$\Phi_e = m\omega^2\rho = m\omega^2\sqrt{(\rho_0 + z)^2 + y^2}. \quad (7)$$

Для полярного угла текущего положения точки M справедлива формула

$$\sin \psi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{(\rho_0 + z)^2 + y^2}}, \quad (8)$$

следовательно,

$$\psi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{(\rho_0 + z)^2 + y^2}}. \quad (9)$$

Тогда проекции переносной силы инерции на координатные оси:

$$\Phi_{e_x} = 0, \quad \Phi_{e_y} = \Phi_e \sin \psi, \quad \Phi_{e_z} = -\Phi_e \cos \psi. \quad (10)$$

Запишем теперь выражения для проекций кориолисовой силы инерции на координатные оси. Воспользуемся очевидными формулами для скорости точки и ее проекции на плоскость Oyz через проекции на координатные оси:

$$\mathbf{v}_r = v_{r_x}\mathbf{i} + v_{r_y}\mathbf{j} + v_{r_z}\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_{r_{yz}} = v_{r_y}\mathbf{j} + v_{r_z}\mathbf{k} = \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – орты указанной выше системы координат.

Тогда для угла β (см. рис. 3) имеет место формула

$$\sin \beta = \frac{v_{r_y}}{v_{r_{yz}}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad (11)$$

т.е.

$$\beta = \arcsin \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \quad (12)$$

Для проекций кориолисовой силы инерции имеем:

$$\Phi_{k_x} = 0, \quad \Phi_{k_y} = -\Phi_k \cos \beta, \quad \Phi_{k_z} = -\Phi_k \sin \beta, \quad (13)$$

причем с учетом формулы (4) и принятых обозначений

$$\Phi_k = 2m\omega v_{r_{yz}} = 2m\omega \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (14)$$

Вывод уравнений движения частицы грунта. Для получения дифференциальных уравнений движения основное векторное уравнение динамики относительного движения запишем в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{\Phi} + \mathbf{N} - Nf \frac{\mathbf{v}_r}{v_r}, \quad (15)$$

где $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_e + \mathbf{\Phi}_k$ – результирующая сила инерции.

Для ее проекций на координатные оси с учетом формул (10), (13) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= \Phi_{e_x} + \Phi_{k_x} = 0, \\ \Phi_y &= \Phi_{e_y} + \Phi_{k_y} = \Phi_e \sin \psi - \Phi_k \cos \beta, \\ \Phi_z &= \Phi_{e_z} + \Phi_{k_z} = -\Phi_e \cos \psi - \Phi_k \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Запишем уравнение поверхности (1) иначе

$$q(x, y, z) = z - p(x, y) = 0. \quad (17)$$

Тогда нормальную реакцию \mathbf{N} можно представить в виде

$$\mathbf{N} = N\mathbf{n} = \lambda \text{grad} q, \quad (18)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности (17) (он направлен в ту область пространства, где $q > 0$); λ – скалярная функция, зависящая от координат точки, проекции ее скорости, причем

$$\lambda = \frac{N}{|\text{grad} q|} = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2}} = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad (19)$$

а $\text{grad}q$ представляет собой вектор, заданный в декартовой системе координат своими проекциями следующим образом:

$$\text{grad}q = \frac{\partial q}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q}{\partial z} \mathbf{k} = -\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k}.$$

Разложим левую и правую части выражения (18) по ортам декартовой системы координат

$$\mathbf{N} = N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k} = \lambda \left(\frac{\partial q}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \lambda \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k} \right),$$

откуда

$$N_x = \lambda \frac{\partial q}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial p}{\partial x}, \quad N_y = \lambda \frac{\partial q}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial p}{\partial y}, \quad N_z = \lambda \frac{\partial q}{\partial z} = \lambda. \quad (20)$$

Проецируя (15) на оси декартовой системы координат, получим с учетом выражений (19), (20) систему скалярных уравнений (**уравнения Лагранжа первого рода**)

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \Phi_x + \lambda \left(\frac{\partial q}{\partial x} - f |\text{grad}q| \frac{\dot{x}}{v_r} \right) = \Phi_x - \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial x} + f |\text{grad}q| \frac{\dot{x}}{v_r} \right), \\ m\ddot{y} &= \Phi_y + \lambda \left(\frac{\partial q}{\partial y} - f |\text{grad}q| \frac{\dot{y}}{v_r} \right) = \Phi_y - \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial y} + f |\text{grad}q| \frac{\dot{y}}{v_r} \right), \\ m\ddot{z} &= \Phi_z + \lambda \left(\frac{\partial q}{\partial z} - f |\text{grad}q| \frac{\dot{z}}{v_r} \right) = \Phi_z + \lambda \left(1 - f |\text{grad}q| \frac{\dot{z}}{v_r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $\ddot{x} = \frac{dv_{r_x}}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{dv_{r_y}}{dt}$, $\ddot{z} = \frac{dv_{r_z}}{dt}$ – проекции относительного ускорения на координатные оси.

Уравнения (21) существенно упрощаются в случае идеальных связей, для которых касательная составляющая силы реакции (сила трения) равна нулю: уравнения не будут содержать последних членов.

Присоединяя к (21) уравнение поверхности (уравнение связи) (17), получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: x , y , z и скалярной функцией λ (**множитель Лагранжа**).

Для решения системы уравнений (17) и (21) необходимо исключить множитель Лагранжа. С этой целью продифференцируем дважды по времени левую часть уравнения (17). Имеем

$$\frac{\partial q}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial q}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial q}{\partial z} \ddot{z} + \tilde{q}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \quad (22)$$

где через $\tilde{q}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ обозначены те члены, которые не зависят от \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} .

Для рассматриваемого случая выражение (22) с учетом формулы (17) приобретает вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \ddot{x} - \frac{\partial p}{\partial y} \ddot{y} + \ddot{z} + \tilde{p}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \quad (23)$$

где

$$\tilde{p}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \dot{x}^2 - 2\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \dot{y}^2. \quad (24)$$

Из уравнений (21) и (23) исключаем \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} . В результате получаем уравнение с неизвестной функцией Лагранжа λ . Решая это уравнение, находим

$$\lambda = \frac{\Phi_x \frac{\partial p}{\partial x} + \Phi_y \frac{\partial p}{\partial y} - \Phi_z + m\tilde{p}}{\frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + f |\text{grad} q| \frac{\dot{x}}{v_r} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + f |\text{grad} q| \frac{\dot{y}}{v_r} \right) + \left(1 - f |\text{grad} q| \frac{\dot{z}}{v_r} \right)}. \quad (25)$$

Подставляя в уравнения (21) выражение (25), приходим к системе дифференциальных уравнений относительно неизвестных x , y , z . Лишь после того, как из уравнений (17) и (21) найдены величины x , y , z и λ , по формулам (20) можно определить проекции N_x , N_y , N_z , а затем и модуль реакции

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + 1}. \quad (26)$$

В случае гладкой поверхности выражение (25) для λ будет значительно более компактным.

Выводы. Построена математическая модель движения частицы грунта по шероховатой поверхности пространственной лопатки роторного грунтометателя. Использованы уравнения динамики относительного движения в форме уравнений Лагранжа первого рода. Поверхность лопатки формируется из брахистохрон, найденных для поля центробежных сил инерции, с использованием двумерной кубической сплайн-интерполяции.

Дальнейшие исследования будут направлены на изучение кинематических характеристик движения частиц грунта по шероховатым поверхностям пространственных лопаток различной формы.

Литература

1. Найдыш В.М. Обоснование параметров и разработка машины для насыпки противозерозионных валов на склонах / В.М. Найдыш, Е.Н. Нагорный, Н.С. Левчук, А.И. Караев // Механизация и электрификация сельхоз производства.– 1989.– № 4.– С. 7-12.

2. Семків О.М. Розрахунок робочого органа ланцюгового ґрунтометального механізму / О.М. Семків, В.М. Шатохін // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”. Випуск 87.– К.: КНУБА.– 2011.– С. 303-312.

3. Шатохин В.М. Об оптимальной форме лопатки роторного ґрунтометателя / В.М. Шатохин, О.М. Семкив, А.Н. Попова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.– 2013.– № 2.– С. 49-55.

4. Шатохин В.М. Сравнение прямолинейной и криволинейной (оптимальной) лопаток роторного ґрунтометателя / В.М. Шатохин, О.М. Семкив, А.Н. Попова // Науково технічний збірник “Енергоефективність в будівництві та архітектурі”.–К.: КНУБА.– 2013.– Вип. 4.– С. 301-309.

5. Шатохін В.М. Про оптимальну форму лопатки роторного металника ґрунту / В.М. Шатохін, О.М. Семків, А.М. Попова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.– Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– Вип. 4.– Т. 55.– С. 260-269.

6. Шатохін В.М. Розроблення методів побудови лопаток оптимальної форми роторного ґрунтометального механізму / В.М. Шатохін, О.М. Семків, Н.В. Шатохіна // Одинадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей.– Львів: КІНПАТРИ ЛТД.– 2013.– С. 96.

7. Попова А.М. Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп’ютерних експериментів / А.М. Попова, В.М. Шатохін // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.– Мелітополь: ТДАТУ.– 2012.– Вип. 4.– Т. 54.– С. 135-144.

8. Шатохин В.М. Оптимальные траектории движения точки, перемещающейся под действием центробежной силы инерции / В.М. Шатохин, Н.В. Шатохина // Восточно-Европейский журнал передовых технологий.– Харьков, 2012.– Вып. 4/7 (58).– С. 9-14.

9. Семків О.М. Опис руху частки ґрунту по лопатці із профілем брахістохрони у полі відцентрових сил інерції / О.М. Семків, В.М. Шатохін, А.М. Попова // Геометричне та комп’ютерне моделювання: Збірник наукових праць.– Харків: ХДУХТ.– 2012.– Вип. 30.– С. 190-200.

10. Семкив О.М. Исследование движения частицы грунта по лопатке с профилем оптимальной формы в поле центробежных сил инерции / О.М. Семкив, В.М. Шатохин, А.Н. Попова // Міжвідомчий науково технічний збірник “Технічна естетика і дизайн”.– К.: КНУБА.– 2012.– Вип. 11.– С. 165-174.

11. Шатохин В.М. Построение пространственных лопаток грунтометателя с помощью брахистохрон для поля центробежных сил инерции / В.М. Шатохин, О.М. Семкив, А.Н. Попова // (статья в этом сборнике).

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ЧАСТКИ ҐРУНТУ ПО ШОРСТКІЙ ПОВЕРХНІ ПРОСТОРОВОЇ ЛОПАТКИ РОТОРНОГО ҐРУНТОМЕТАЛЬНИКА

В.М. Шатохін, Н.В. Шатохіна, А.М. Попова

Побудовано математичну модель руху частки ґрунту по шорсткій поверхні просторової лопатки роторного ґрунтометальника. Використано рівняння динаміки відносного руху у формі рівнянь Лагранжу першого роду. Поверхня лопатки формується з брахістохрон, знайдених для поля відцентрових сил інерції, з використанням двовимірної кубічної сплайн-інтерполяції.

MODELING OF SOIL PARTICLE MOVEMENT ALONG THE ROUGH SURFACE OF THREE-DIMENSIONAL ROTOR GROUND- THROWER'S BLADE

V. Shatokhin, N. Shatokhina, A. Popova

Mathematical model of soil particle movement along the rough surface of three-dimensional rotor ground-thrower's blade is built. Dynamic equations of relative movement in Lagrangian form of the first kind are used. Surface of the blade is formed by brachistochrones, that were found for the field of centrifugal inertia forces with usage of two-dimensional cubic spline interpolation.