

ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ ЛАНЦЮГОВОЇ ЛІНІЇ

Київський національний інститут будівництва і архітектури

На основі статико-геометричного методу запропоновано алгоритм побудови множини точок, що наближено належать ланцюговій лінії, яка задана точками кріплення та рівнем точки прогину.

Постановка проблеми. Розв'язання багатьох інженерних задач вимагає застосування дискретної моделі геометричних об'єктів. Особливо це стосується задач побудови моделей геометричних об'єктів, заданих складними рівняннями, котрі не дозволяють врахувати при конструюванні всі наявні параметри. До таких геометричних об'єктів належить ланцюгова лінія, що є математичною моделлю нерозтяжної гнучкої ниті з закріпленими кінцями. Вона широко застосовується в техніці та архітектурі як для провисаючих так і для аروحних конструкцій, які мають високу стійкість завдяки тому, що внутрішні сили тиску ідеально компенсовані.

Цікавою з геометричної і корисною з практичної точки зору є задача побудови ланцюгової лінії по заданим точкам закріплених країв, що мають різні висоти, та по висоті точки прогину над рівнем горизонтальної площини.

Огляд літератури. Ланцюгова лінія [1] формується під дією власної ваги, рівномірно розподіленою вздовж її довжини, тому задачу її моделювання ефективно розв'язувати на основі статико-геометричного методу. В багатьох дослідженнях з дискретної геометрії [2] зустрічається задача дискретного формування лінії за трьома заданими вузлами, які розміщені на рівномірній сітці вздовж осі Ox при рівномірному розподіленні невідомого зовнішнього навантаження. Два вузли задаються як опорні, а ординати довільного вузла як параметр управління формою. У випадку коли, такий вузол екстремальний задача не розв'язана.

Основна частина. Для формування дискретного каркасу ланцюгової лінії необхідно навантаження рівномірно розподіляти вздовж її довжини. Для цього [2] в загальному рівнянні рівноваги вузлів:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = kP_i, \quad (1)$$

сили P_i , що навантажують вузол, мають бути пропорційними довжинам ланок, що примикають до i – тої вершини

$$kP_i = \sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2} + \sqrt{\Delta x^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}. \quad (2)$$

Вираз записано для випадку, коли шаг по вісі Ox обрано рівномірним.

За допомогою рівнянь (1), (2) будемо розв'язувати наступну практичну задачу. Нехай ланцюгову лінію задано точками A і B (рис.1) і рівнем $h=y_s$ точки прогину. Остаточо задати точку S прогину неможливо,

бо ланцюгова лінія має три параметри, а повноцінне завдання точки S окрім умови належності, вимагає і умову її дотику до прямої $y=h$.

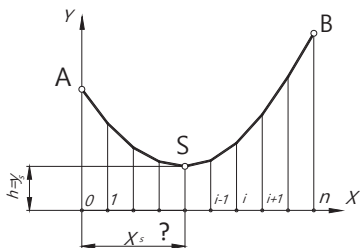


Рис.1. Умова задачі.

Система (1), (2) – система нелінійних рівнянь, яка може бути розв’язана лише методом наближень. Далі для розв’язання пропонуються два варіанти першого наближення, та методика урахування умови в середині інтервалу, а саме умови дотику ланцюгової лінії до прямої $y=h=y_s$.

В першому варіанті задаємо множину $\{y_i\}_0$ ($i=1\dots n-1$) таку, що задовольняє всі умови вихідної задачі за винятком рівноваги зусиль натягу (2) і саме за допомогою цих рівнянь розраховуємо множину зовнішніх зусиль $\{P_i\}_1$ для першої ітерації.

В другому варіанті задаємо множину $\{P_i\}_0$ так, щоб за розв’язком системи (1) була сформована множина $\{y_i\}_0$, яка задовольняє всі умови вихідної задачі.

Відомо [2], що система рівнянь (1) при сталому P визначає деяку параболу

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (3)$$

В обох варіантах параболу (3) використовується для розрахунку першого наближення. Її коефіцієнти знаходяться за умов належності параболу точкам $A(0, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $S(x_S, y_S)$ і за умови, що в екстремальній точці S , перша похідна дорівнює нулю. Отримуємо чотири рівняння з чотирма невідомими a_0, a_1, a_2, x_S , з яких –

$$a_0 = y_A;$$

$$a_1 = \frac{1}{x_B} (2(y_S - y_A) \pm 2 * \sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)});$$

$$a_2 = \frac{1}{x_B^2} (-2y_S + y_A + y_B \pm 2 * \sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}); \quad (4)$$

$$x_S = \frac{-a_1}{2a_2};$$

де перед квадратним коренем знак «+» при $y_S \geq \max\{y_A, y_B\}$ і знак «-» при $y_S \leq \min\{y_A, y_B\}$.

Перший варіант. Враховуючи, що $x_i = i \frac{x_B}{n}$, де i – номер вузла, а n – число ланок, маємо формулу для розрахунку координат $\{y_i\}_0$ першого наближення:

$$y_i = a_0 + \frac{ix_B}{n} a_1 + \frac{i^2 x_B^2}{n^2} a_2, \quad (5)$$

де коефіцієнти a_0, a_1, a_2 визначаються з (4).

Другий варіант. Спочатку знаходимо $\{P_i\}_0$. З [2] відомо, що для рівняння (1), яке визначає параболу (5), навантаження стале і задається коефіцієнтом a_2 параболу і кроком по вісі Ox :

$$P = -2\Delta x^2 a_2.$$

Беручи вираз для a_2 з (4) і враховуючи, що $\Delta x = \frac{x_B}{n}$, маємо:

$$\{P_i\}_0 \equiv P = \frac{2[2y_S - y_n - y_2 + 2\sqrt{(y_S - y_A)^2 + (y_S - y_B)^2}]}{n^2}. \quad (6)$$

Розв'язуючи (1) при $k=1$ отримуємо $\{y_i\}_0$.

Перехід від дискретно визначеної параболу $\{y_i\}_0$ до дискретно заданої ланцюгової лінії $\{y_i\}_N$ здійснюється в ітераційний спосіб, де N – кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.

Система (1), (2) складається з $n-1$ -го рівняння, це дорівнює кількості внутрішніх точок, ординати яких є невідомими. За рахунок невідомої ітераційної змінної k ордината одного з вузлів має бути визначена як така, що дорівнює ординаті екстремального вузла S . Номер цього вузла в процесі ітерації може змінюватись.

Алгоритм ітераційного процесу виглядає наступним чином.

1. За одним з варіантів: або за формулою (5), або за системою (1), для якої значення P розраховується по формулі (6), визначаються ординати вузлів вихідного наближення $\{y_i\}_0$.
2. За формулою (2) обчислюються значення P_i для кожного вузла.
3. Складається і розв'язується система (1) рівноваги вузлів.
4. Визначається номер екстремального вузла S .
5. Порівнюються ординати вузлів поточного і попереднього наближення. Якщо похибка $\sigma = y_i^{j+1} - y_i^j$, де верхній індекс є номером ітерації, не перевищує заданої допустимої похибки, ітераційний процес зупиняється. Якщо $\sigma > \sigma_{\text{доп}}$, ітераційний процес повторюється з пункту 2.

В прикладах, що наведені нижче в нульовій строчці таблиці наведено ординати першого наближення. В усіх прикладах задана припустима похибка $\sigma = y_{i+1} - y_i = \pm 0,001$.

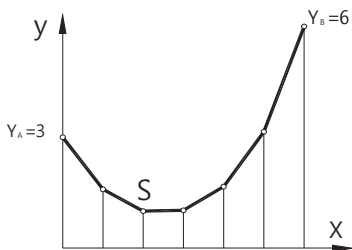
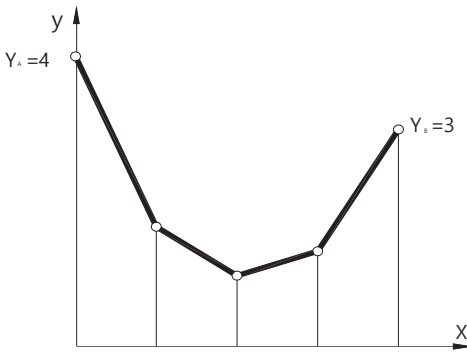


Рис.2. Приклад 1.

Приклад 1. Задано вихідні точки $A(x=0, y=3)$, $B(x=6, y=6)$ і ордината найнижчої точки S ланцюга $y_S=1$. Приклад розв'язується за першим варіантом. Парабола першого наближення має абсцису $x_S = 2,3248$ в мінімальній точці. Результати обчислень, що досягнуті на п'ятій ітерації наведені в таблиці 1 і на рис.2.

Таблиця. 1

Зовнішнє навантаження					Ординати вузлів						
кР ₁	кР ₂	кР ₃	кР ₄	кР ₅	Y ₀	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	Y ₆
					3	1,649	1,039	1,169	2,038	3,649	6
2,852	2,131	2,333	3,221	4,451	3	1,601	1	0,9966	1,647	3,1999	6
2,887	2,579	2,605	3,040	4,820	3	1,605	0,965	1	1,716	3,228	6
2,904	2,188	2,231	3,043	4,760	3	1,593	1	1,021	1,667	3,166	6
2,889	2,163	2,191	2,992	4,807	3	1,591	1	1,021	1,663	3,151	6
2,889	2,162	2,189	2,981	4,812	3	1,591	1	1,022	1,664	3,150	6



Приклад 2. Задано вихідні точки $A(x=0, y=4)$, $B(x=4, y=3)$ і ордината найнижчої точки S ланцюга $y_s=1$. Приклад розв'язано за другим варіантом тому в нульовій строчці задано kP_i , що обчислені за формулою (6). Результати обчислень, що досягнуті на шостій ітерації наведені в таблиці 2 і на рис.3.

Рис 3. Приклад 2.

Таблиця 2

№ Ітер.	Зовнішнє навантаження				Ординати вузлів				
	кР ₁	кР ₂	кР ₃	К'	Y ₀	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄
0	-1,25	-1,25	-1,25	1	4	1,875	1	1,375	3
1	3,6773	2,3968	2,976	-0,4368	4	1,6969	1	1,35	3
2	3,7297	2,2784	2,9889	-0,4434	4	1,6729	1	1,3373	3
3	3,7382	2,2607	2,9957	-0,4443	4	1,6695	1	1,3347	3
4	3,7394	2,2579	2,997	-0,4444	4	1,6693	1	1,3341	3
5	3,7395	2,2579	2,9973	-0,4444	4	1,6692	1	1,3341	3
6	3,7396	2,2579	2,9973	-0,4444	4	1,6692	1	1,3341	3

Приклад 3. Наведено приклад складеної ламаної (рис.4). Ламана OB побудована за точками $O(x=0, y=0)$ та $B(x=6, y=3)$. Ордината найвищої точки $y_s=4$. Приклад розв'язується за першим варіантом. Найвища точка параболі наближення $x_s=4$. Результати наведено в таблиці 3.

Додатково задано точку $E(x=12,y=5)$. Для забезпечення гладкого стику сьомий вузол D задано на прямій, що визначає останню ланку ламаної OB тому: $y_7=2y_6-y_5$, і задати заздалегідь екстремальну точку неможливо. Точка прогину знайшлася в восьмому вузлі за алгоритмом з [2]. Результат досягнутий на третій ітерації наведено в таблиці 4.

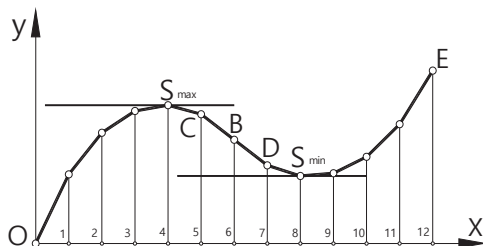


Рис. 4. Приклад 3.

Таблиця 3

№ Ітер.	Зовнішнє навантаження					Ординати вузлів						
	кР ₁	кР ₂	кР ₃	кР ₄	кР ₅	Y ₀	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	Y ₆
0	-	-	-	-	-	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3
1	3,616	2,851	2,281	2,062	2,281	0	1,9750	3,201	3,837	4	3,736	3
2	3,797	2,767	2,198	2,048	2,276	0	2,000	3,206	3,833	4	3,738	3
3	3,803	2,747	2,194	2,048	2,277	0	2,001	3,204	3,832	4	2,739	3
4	3,801	2,745	2,195	2,048	2,277	0	2,000	3,203	3,832	4	2,739	3

Таблиця 4.

Зовнішнє навантаження					Ординати вузлів						
кР ₇	кР ₈	кР ₉	кР ₁₀	кР ₁₁	Y ₆	Y ₇	Y ₈	Y ₉	Y ₁₀	Y ₁₁	Y ₁₂
-	-	-	-	-	3	2,261	1,951	2,07	2,618	3,595	5
2,290	2,054	2,147	2,538	3,123	3	2,261	1,948	2,025	2,505	3,460	5
2,291	2,051	2,112	2,492	3,219	3	2,261	1,953	2,031	2,506	3,450	5
2,290	2,049	2,110	2,482	3,220	3	2,261	1,953	2,032	2,507	3,450	5

Висновки. Розв'язана задача розширює можливість застосування ланцюгової лінії в архітектурі і техніці.

Література

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения /под редакцией А.П.Нордена. – М.:Госиздат физ.-мат.лит.,1960. – 289 с.
2. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дис....докт.техн.наук.- М.: 1986. – 348 с.

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ЦЕПНОЙ ЛИНИИ

О.В. Мостовенко, В.О. Анпілогова

На основе статико-геометрического метода предложен алгоритм построения множества точек, которые приближенно отображают цепную линию, заданную точками крепления и уровнем точки провисания.

DISCRETE MODEL OF THE CHAIN LINE

O. Mostovenko, V. Anpilogova

A set of points algorithm that approximately belong to the catenary line that is assigned by basis point and sag, is offered on the basis of static-geometrical method.