УДК 514.18

С.Ф. Пилипака, д.т.н., проф.,
І.Ю. Грищенко, к.т.н, доц.,
О.В. Несвідоміна

КОНСТРУЮВАННЯ ІЗОМЕТРИЧНИХ СІТОК НА ПОВЕРХНІ КУЛІ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

За основу взято дві відомі ізометричні сітки на поверхні кулі, які можна отримати інверсією плоских ізометричних сіток декартової і полярної систем координат. Введенням аналітичної функції комплексної змінної на основі цих сіток отримано нові ізометричні сітки. Виведено параметричні рівняння кулі, віднесеної до різних ізометричних сіток.

Постановка проблеми. Ізометричні сітки можуть бути плоскими і просторовими, тобто поверхня може бути віднесена до ізометричних координат. Проте не всі поверхні можуть бути таким чином описані. В роботі [1] розглянуто конструювання поверхонь обертання, віднесених до ізометричних сіток координатних ліній. Такі сітки дають можливість конформно відображати плоскі зображення на поверхні [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Плоскі ізометричні сітки можна отримати на основі перетворення функції комплексної змінної [3]. Оскільки площина перетворенням інверсії переходить у поверхню кулі, то плоска ізометрична сітка перетворюється у сферичну і при цьому залишається ізотермічною. Отже кулю можна відносити до різних ізометричних сіток, що показано в праці [4]. В праці [5] показано, що деякі поверхні обертання теж можна віднести до ізометричних сіток, які за певних аналітичних умов утворюють сім'ї паралелей і меридіанів.

Формулювання цілей та завдання статті. Віднести поверхню кулі до різних ізотермічних сіток, утворених сім'ями координатних ліній, на основі аналітичної функції комплексної змінної.

Основна частина. При переході до ізометричної сітки параметричні рівняння кулі одиничного радіуса, в яких u і v є незалежними змінними поверхні, запишуться [4]:

$$X = \operatorname{sech} u \cos v; \qquad Y = \operatorname{sech} u \sin v; \qquad Z = \tanh u;$$
$$dS^2 = \operatorname{sech}^2 u\left(du^2 + dv^2\right). \tag{1}$$

Перша квадратична форма кулі, наведена в (1), має вигляд, характерний для ізометричних сіток: середній коефіцієнт дорівнює нулю, а крайні рівні між собою. Завдяки цьому нескінченно малий елемент такої сітки є квадратом, а чарунки – близькі до квадратів.

Інверсія плоскої декартової сітки дає наступні вирази [4]:

$$X=\frac{u}{u^2+v^2+1};\qquad Y=\frac{v}{u^2+v^2+1};\qquad Z=\frac{1}{u^2+v^2+1};$$
$$dS^2=\frac{du^2+dv^2}{\left(u^2+v^2+1\right)^2}. \tag{2}$$

Зображення куль, віднесених до цих ізометричних сіток, показано на рис. 1.

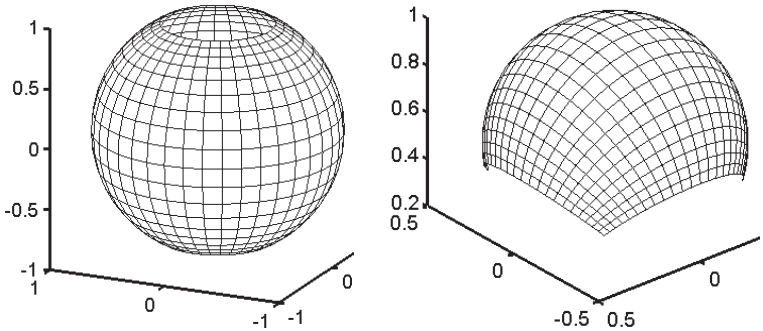


Рис. 1. Поверхні куль, віднесені до різних ізометричних сіток:
а) поверхня побудована за рівняннями (1);
б) поверхня побудована за рівняннями (2)

За допомогою аналітичної функції комплексної змінної можна отримати ізометричну сітку на площині [4]. Наприклад, нехай функція комплексної змінної $w=u+iv$ буде квадратичною: $f(w)=w^2=(u+iv)^2$. Піднісши цей вираз до квадрату, отримаємо: $f(w)=w^2=u^2+2uiv-v^2$. Отже, дійсна і уявна складові цієї функції матимуть вигляд:

$$\mathrm{Re}\{f(w)\}=u^2-v^2;\qquad \mathrm{Im}\{f(w)\}=2uv. \tag{3}$$

Сітка на площині утвориться, якщо ми візьмемо $X=Re\{f(w)\}$ і $Y=Im\{f(w)\}$, тобто:

$$X=u^2-v^2;\qquad Y=2uv. \tag{4}$$

Плоска сітка, побудована за рівняннями (4), показана на рис. 2,а.

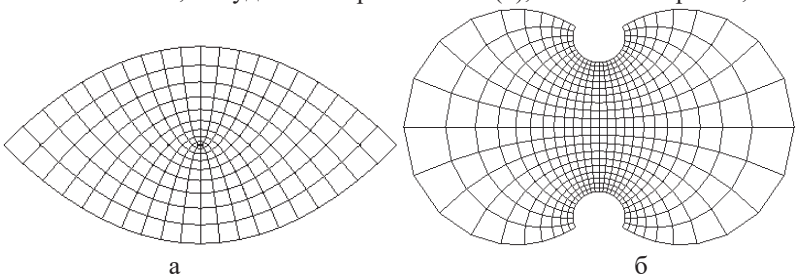


Рис. 2. Плоскі ізометричні сітки:
а) побудовано за рівняннями (4); б) побудована за рівняннями (12)

Якщо ми маємо ізометричну сітку на поверхні (наприклад, на кулі), то можна отримати на ній нову ізометричну сітку підстановкою в рівняння поверхні дійсної *Re{f(w)}* і уявної *Im{f(w)}* частин аналітичної функції комплексної змінної замість змінних *u* і *v*. Наприклад, рівняння кулі (2) можна переписати в загальному вигляді для довільної функції *f(w)*:

$$X = \frac{\mathrm{Re}\{f(w)\}}{\mathrm{Re}\{f(w)\}^2 + \mathrm{Im}\{f(w)\}^2 + 1};$$
$$Y = \frac{\mathrm{Im}\{f(w)\}}{\mathrm{Re}\{f(w)\}^2 + \mathrm{Im}\{f(w)\}^2 + 1}; \qquad (5)$$
$$Z = \frac{1}{\mathrm{Re}\{f(w)\}^2 + \mathrm{Im}\{f(w)\}^2 + 1}.$$

Аналогічні узагальнені параметричні рівняння можна записати для рівнянь кулі (1). Підставивши (3) в (5), після спрощень отримаємо:

$$X = \frac{u^2 - v^2}{\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1}; \qquad Y = \frac{2uv}{\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1}; \qquad Z = \frac{1}{\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1}. \qquad (6)$$

Перевіримо параметричні рівняння (6) на ізометричність сітки координатних ліній через першу квадратичну форму. Знаходимо частинні похідні рівнянь (6):

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{u\left(2 - 2u^4 + 4u^2v^2 + 6v^4\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2}; \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{2v\left(1 + 3u^4 + 2u^2v^2 - v^4\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2};$$
$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{2v\left(1 - 3u^4 - 2u^2v^2 + v^4\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = -\frac{2u\left(1 + u^4 - 2u^2v^2 - 3v^4\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2}; \qquad (7)$$
$$\frac{\partial Z}{\partial u} = -\frac{4u\left(u^2 + v^2\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2}; \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = -\frac{4v\left(u^2 + v^2\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2}.$$

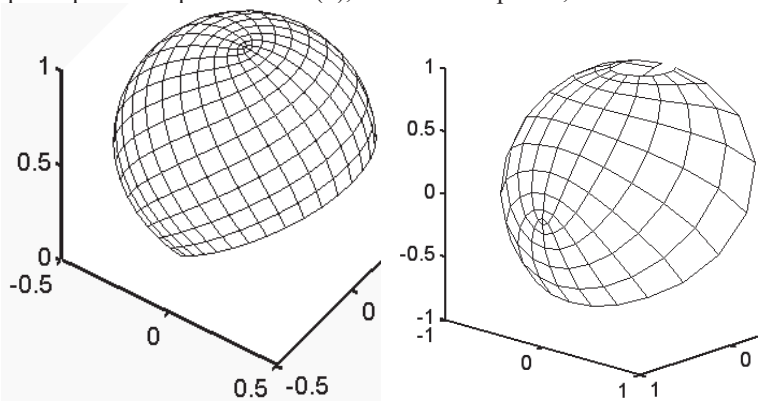
Коефіцієнти першої квадратичної форми кулі (6) запишуться:

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 = \frac{4\left(u^2 + v^2\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2};$$
$$F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial v} = 0; \qquad (8)$$
$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 = \frac{4\left(u^2 + v^2\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2}.$$

Перша квадратична форма кулі (6) запишеться:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \frac{4\left(u^2 + v^2\right)}{\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 + 1\right]^2}\left(du^2 + dv^2\right). \qquad (9)$$

Перша квадратична форма (9) поверхні кулі (6) вказує на те, що поверхня віднесена до ізометричних координат. Її зображення, побудоване за параметричними рівняннями (6), показане на рис. 3,а.



а б

Рис. 3. Поверхні куль, віднесені до різних ізометричних сіток:
а) поверхня побудована за рівняннями (6);
б) поверхня побудована за рівняннями (10)

Якщо ж цю саму аналітичну функцію (3) комплексної змінної підставити у рівняння (1), то ми отримаємо рівняння кулі, віднесеної до іншої ізометричної сітки:

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{sech}\left(u^2 - v^2\right)\cos(2uv); \\ Y &= \operatorname{sech}\left(u^2 - v^2\right)\sin(2uv); \\ Z &= \tanh\left(u^2 - v^2\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Її зображення наведено на рис. 3,б.

Візьмемо ще одну аналітичну функцію комплексної змінної:

$$f(w) = \sinh(\operatorname{tg} w). \tag{11}$$

Розділивши дійсну і уявну частини в (11), отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f(w)\} &= \sinh\left(\frac{\sin 2u}{\cos 2u + \cosh 2v}\right)\cos\left(\frac{\sinh 2v}{\cos 2u + \cosh 2v}\right); \\ \operatorname{Im}\{f(w)\} &= \cosh\left(\frac{\sin 2u}{\cos 2u + \cosh 2v}\right)\sin\left(\frac{\sinh 2v}{\cos 2u + \cosh 2v}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Прирівнявши рівняння (12) до *X=Re{f(w)}* і *Y=Im{f(w)}*, ми отримаємо параметричні рівняння плоскої ізометричної сітки, яка побудована на рис. 2,б.

Якщо цю аналітичну функцію (12) підставити у параметричні рівняння (5), то ми отримаємо рівняння кулі, віднесеної до нової

ізометричної сітки. Самих рівнянь не наводимо із-за їх громіздкого вигляду, а зображення кулі наводимо на рис. 4,а.

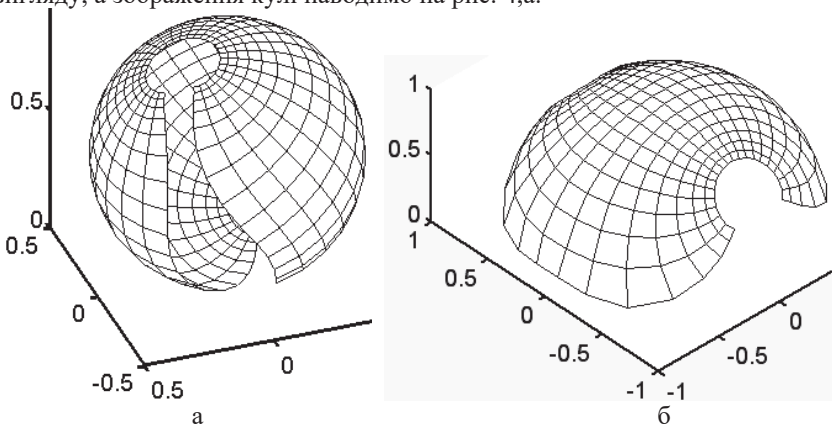


Рис. 4. Поверхні куль, віднесені до різних ізометричних сіток:
а) поверхня для параметричних рівнянь (2) і аналітичної функції (11);
б) поверхня для параметричних рівнянь (1) і аналітичної функції (11)

Ізометрична сітка кулі на рис. 4,а подібна до сітки на рис. 1,а. Однак це різні сітки. На рис. 1,а координатними лініями є плоскі криві (кола) – меридіани і паралелі. На рис. 4,а координатними лініями є просторові криві.

Підстановка аналітичної функції (12) у параметричні рівняння кулі (1) за наведеним алгоритмом дає можливість отримати ще одну ізометричну сітку, яка зображена на рис. 4,б.

Висновки. Отримувати різні ізометричні сітки на поверхні кулі можна різними способами. В основі їх лежить аналітична функція комплексної змінної. За допомогою її можна побудувати ізометричну сітку на площині, а потім інверсією перетворити її на сферичну. Якщо є параметричні рівняння кулі, віднесеної до ізометричних координат, то за допомогою функції комплексної змінної можна утворити нову ізометричну сітку на її поверхні.

Перспективи подальших досліджень полягають у конструюванні ізометричних сіток на поверхні кулі, які б могли бути використані при створенні архітектурних об’єктів або творів дизайну.

Література

1. *Несвідомін В.М.* Конструювання поверхонь обертання, віднесених до ізометричних сіток координатних ліній [Текст] / В.М. Несвідомін, Т.С. Кремець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. –К.: КНУБА, 2012. –Вип. 89. – С. 271 – 276.

2. *Кремець Т.С.* Конформне відображення написів на ізометричні сітки конуса та кулі [Текст] / Т.С. Кремець // Технічна естетика і дизайн. – К.: Віпол, 2011. – Вип. 9. – С. 112 – 117.
3. *Пилипака С.Ф.* Конструювання ортогональних сіток на основі перетворень функції комплексної змінної [Текст] / *С.Ф. Пилипака, В.В. Дзюба, Е.О. Чернишова* // Агротехнічний науково-методичний збірник. Збірник наукових праць Ніжинського агротехнічного інституту. – Ніжин: НАТІ, 2005. – С. 69-72.
4. *Несвідомін В.М.* Поворот зображень на поверхнях, віднесених до просторових ізометричних сіток [Текст] / В.М. Несвідомін, Т.С. Кремець, Т.С. Пилипака // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: МДПУ, 2014. – Вип. 3. - С. 93 – 99.
5. *Кремець Т.С.* Аналітичний пошук поверхонь обертання, віднесених до ізометричних координат [Текст] / Т.С. Кремець, Т.С. Пилипака, І.Ю. Грищенко // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: техніка та енергетика АПК / Редкол.: Д.О.Мельничук (відп. ред.) та ін. – К., 2012. – Вип 170, ч. 2. – С. 231 – 239.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

С.Ф Пилипака, И.Ю. Грищенко, А.В. Несвидомина

За основу взяты две известные изометрические сети на поверхности шара, которые можно получить инверсией плоских изометрических сетей декартовой и полярной систем координат. Введением аналитической функции комплексной переменной на основе этих сетей получены новые изометрические сети. Выведены параметрические уравнения шара, отнесенной к различным изометрическим сетям.

CONSTRUCTION OF ISOMETRIC NETWORKS ON THE SPHERE

S. Pylypaka, I. Grischenko, O. Nesvidomina

Two known isometric networks on the surface of the ball are taken as the base, which can be obtained by inversion of plane isometric networks of Cartesian and polar coordinate systems. The introduction of an analytic function by a complex change on the basis of these networks obtained new isometric networks. The parametric equations of a sphere related to different isometric networks are derived.