УДК 514.18

С.Г. Якусевич, ас.,
В.О. Плоский, д.т.н., проф.

СПОСІБ ВІДТВОРЕННЯ ТЕМПЕРАТРУНИХ ПОЛІВ КОНСТРУКТИВНИХ ВУЗЛІВ БУДІВЕЛЬ ТА СПОРУД

Київський Національний Університет Будівництва і Архітектури, Україна

У роботі розкриваються принципи моделювання температурних полів на основі побудови потенціальних функцій температури від умовних джерел та стоків теплової енергії. При цьому пропонується використання підходу, аналогічного до того, що застосовується при моделюванні ізоліній та ізоповерхонь потенціалу електростатичних полів.

Постановка проблеми. При вирішенні більшості задач будівельної фізики, які пов'язані з дослідженням температурно-вологісного режиму приміщень або будівель в цілому, виникає необхідність у відтворенні температурних полів у елементах і вузлах зовнішніх огороджувальних конструкцій. Найчастіше проектувальники та науковці вдаються до використання чисельного моделювання, на основі якого отримуються дані щодо значень температур у деяких точках наперед визначеної сітки. Однак, ці дані носять дискретний характер і ускладнюють точне визначення інших важливих фізичних показників, таких як тепловтрати у довільній точці поверхні огороджувальної конструкції або температура поверхні у деякій іншій точці, що не належить до сітки базових вузлів чисельної моделі. Тому, після моделювання температурного поля у визначених точках моделі вдаються до інтерполяційних алгоритмів, які дозволяють отримати проміжні дані між базовими розрахунковими вузлами. Все це призводить до використання комп'ютерних програм, які працюють на основі чисельних методів. Операційні алгоритми таких програм, як правило, є закритими і комерційними й користувачі не мають можливості перевіряти їх точність і коректність з фізично точки зору. Натомість, методи, що дозволяють на основі певних допущень відтворювати неперервні функції температурних полів майже не розвиваються, оскільки передбачають складні математичні перетворення та вимагають від інженера або науковця наявність високого рівня підготовки й кваліфікації. Очевидно, розробка відносно простих та наочних методів побудови функцій неперервних температурних полів є актуальною та важливою з практичної точки зору проблемою.

Формулювання цілей та завдання публікації. Беручи до уваги все вище зазначене, побудуємо алгоритм відтворення температурного поля у зовнішніх огороджувальних конструкціях та елементах, що до них примикають, спираючись на неперервні математичні функції.

Огляд основних досліджень. Найбільш уживаними чисельними методами, які застосовуються при моделюванні температурних полів є метод скінченних елементів [1, 2, 3], метод граничних елементів [4] та метод скінченних різниць [5, 6, 7].

Перший з методів є найбільш універсальним, оскільки допускає майже будь-яку варіацію геометричних параметрів ділянки або області, у якій досліджується процес розповсюдження температурного поля, а також велику кількість можливих підходів до дискретизації цієї ділянки. Цей метод являється особливо ефективним у випадку, коли досліджувані конструкції мають складну геометрію з різкими зменшенням або збільшенням товщин матеріалів, оскільки на таких ділянках часто виникають високі концентрації ізоліній температурного поля, що в свою чергу призводить до необхідності деталізації розрахункової моделі та ущільнення дискретизації. При цьому, окремі елементи моделі (обмежені розрахунковими вузлами) можуть значною мірою відрізнятися за розмірами, формою та топологічними ознаками. Висока адаптивність методу скінченних елементів є наслідком застосування великого розмаїття функцій форм самих скінчених елементів, що представляють собою локальні інтерполяційні поліноми і дозволяють віднаходити усереднені показники шуканих параметрів за їх вузловими значеннями (але в межах одного елементу). Для кожного вузла моделі складається рівняння, що описує взаємовплив суміжних елементів та вузлів. Розв'язання одержаної системи дає можливість визначити температуру в кожному вузлі.

Метод граничних елементів передбачає схожий підхід до відтворення температурного поля, однак, в більшості випадку, є більш складним, оскільки вимагає від дослідника чи інженера побудову комплексних функціонально заданих граничних умов моделювання. Такі граничні умови часто передбачають виконання ряду інтегральних перетворень та інших математичних дій, застосування елементів теорії параметризації та переважно є прерогативою спеціалістів високого рівня підготовки.

Метод скінченних різниць також потребує побудову дискретної моделі досліджуваної ділянки або об'єкта, однак в більшості інтерпретацій передбачає певні обмежені, пов'язані з використанням рівномірного кроку розбиття моделі, а також ортогональної сітки або з чарунками однаковими за топологічними ознаками. Найбільш поширеними й простими для реалізації розрахунків є трикутні, чотирикутні та шестикутні чарунки з прямолінійними ребрами. Можливість використання обчислювальних шаблонів, що застосовуються для кожного вузла моделі при побудові рівнянь взаємозв'язку між показниками температур суміжних вузлів, робить метод скінченних різниць найбільш наочним та простим для системного розрахунку. При цьому дослідник має можливість досягти практично будь-якої точності розрахунку за рахунок зменшення кроку вузлів та збільшення кількості чарунок відповідно.

Спільною рисою усіх цих методів є системний підхід до розв'язання та в більшості випадків необхідність у реалізації ітераційного числення, збіжність якого не завжди можлива, особливо, якщо рівняння мають нелінійних характер, а досліджувана область піддається складним функціональним тепловим навантаженням внутрішніх і зовнішніх джерел енергії.

Основна частина. Перш за все, необхідно з'ясувати умови існування деякої неперервної функції

$$T = f(x, y), \tag{1}$$

що визначатиме температуру T в середині конструкцій.

Для цього розглянемо диференційне рівняння теплопровідності:

$$a \cdot \Delta T + \frac{\gamma}{c \cdot \rho} = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \tag{2}$$

де a – коефіцієнт температуропровідності, що визначається за формулою:

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}; \tag{3}$$

λ, c та ρ – коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність та густина матеріалу конструкції відповідно; γ – джерело теплоти (просторова щільність джерел теплової енергії), виділеної в одиниці об'єму середовища за одиницю часу τ; Δ – оператор Лапласа, що для m-вимірного простору визначається за формулою:

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \; m = 1,2,3; \tag{4}$$

∇ – оператор Гамільтона, що для m-вимірного простору має таку форму:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \overline{e_i}, \; m = 1,2,3. \tag{5}$$

Для випадку стаціонарної теплопередачі, що найчастіше розглядається у задачах будівельної фізики:

$$\lambda \cdot \Delta T + \gamma = 0, \tag{6}$$

Очевидно, що шукана функція (1) має задовільняти диференційному рівнянню в часткових похідних параболічного типу (6). Окрім того, функція (1) повинна бути потенціальною, оскільки, за законом Фур'є, тепловий потік $\overline{q}$ знаходиться у градієнтній залежності з температурою T:

$$\overline{q} = -\lambda \cdot \nabla T. \tag{7}$$

Щоб побудувати неперервну функцію температури, звернемося до принципів побудови функцій потенціалу електростатичних полів [8, 9]. Відповідні функції також повинні бути потенціальними й задовільняти аналогічному до (6) диференціальному рівнянню.

Розглянемо довільну суцільну огороджувальну конструкцію. Якщо розглядати її внутрішню поверхню, то по відношенню до матеріалу самої конструкції ця поверхня представлятиме собою передатчик тепла від внутрішніх приміщень або джерело тепла. З іншого боку, зовнішня поверхня конструкції по відношенню до її внутрішнього матеріалу представлятиме собою поглинач теплової енергії й передатчик цієї енергії у зовнішнє середовище. Іншими словами, якщо не розглядати зовнішнє та внутрішнє середовище, то внутрішню поверхню огороджувальної конструкції можна вважати умовним поверхневим джерелом витоку енергії, а зовнішню поверхню – умовним поверхневим стоком енергії. Фактично та поверхня, температура якої вища, буде представляти собою умовне джерело, а інша – умовний сток. Тому в теплу пору року, коли приміщення штучно охолоджуватимуться, ситуація змінюватиметься на протилежну і внутрішня поверхня перетворюватиметься на сток, а зовнішня – на виток.

Для того, щоб записати функцію температури в *i*-й точці, що розповсюджуватиметься від *j*-го витоку або стоку енергії, необхідно ввести додаткову величину ξ_j, яка представлятиме собою умовну щільність виділення (пропускання) або поглинання теплової енергії поверхнею Ω_j витоку або стоку відповідно. При цьому, функція прийме наступний вигляд:

$$T_{i,j} = \int_{\Omega_j} \frac{\xi_j \, d\Omega_j}{r_{i,j}}, \tag{8}$$

де $r_{i,j}$ – це відстань від елементарного умовного обсягу поверхневої теплової енергії $\xi_j d\Omega_j$ до *i*-ї досліджуваної точки поля в межах матеріалу конструкції, що розглядається.

Функція (8) є потенціальною та задовільняє рівнянню (6).

Відповідно, якщо необхідно побудувати температурне поле, створене системою з *n* умовних джерел та стоків, представлених внутрішніми та зовнішніми поверхнями огороджувальної конструкції, то, відповідно до принципу суперпозиції, функція температури матиме наступну форму:

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_j} \frac{\xi_j \, d\Omega_j}{r_{i,j}}. \tag{9}$$

Якщо прийняти умову, що поверхні однорідні та не мають відмінностей з точки зору здатності поглинання та виділення теплової енергії в межах однієї ділянки (обмеженої умовними межами розбиття), то умовну щільність виділення або поглинання теплової енергії ξ_j можна вважати сталою величиною на кожній поверхні (ділянці). Це припущення є цілком допустимим, оскільки в більшості випадків в межах окремих плоских ділянок не застосовуються різні опоряджувальні матеріали. Якщо все ж таки використані різні матеріали з різними величинами ξ_j, то доцільніше здійснити додаткове розбиття даної поверхні на окремі фрагменти. Відтак, застосовуючи зазначена припущення, можна переписати вираз (9) наступним чином, виносячи значення умовних щільностей ξ_j з під інтегральних виразів:

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \int_{\Omega_j} \frac{d\,\Omega_j}{r_{i,j}} . \qquad (10)$$

Спираючись на функцію (10), сформулюємо алгоритм побудови неперервного температурного поля.

1. Перш за все, необхідно визначитися зі способом розбиття досліджуваного вузла конструкції на окремі поверхні або їх елементи, які в подальшому представлятимуть собою умовні джерела або стоки теплової енергії.

2. Побудувати функції форм кожної з ділянок умовного розбиття. У найпростішому й найбільш практичному випадку функції форм цих ділянок будуть представлені функціями поверхонь (для тривимірного простору) або прямих (для двовимірного випадку) загального положення.

3. Обрати найбільш характерні точки S_i на одержаних окремих i-х поверхнях (або точки, що лежать у максимально малому околі точок цих поверхонь) та задати або шляхом вирішення одновимірної задачі теплопровідності віднайти значення температур T_i в обраних точках. В роботі [10] було продемонстровано принцип розрахунку температур на поверхнях огороджувальної конструкції на основі значень її опору теплопередачі та прийнятих величин температур зовні та у приміщеннях. Точки варто підбирати таким чином, щоб їх температури можна було б розрахувати без застосування чисельних методів або складних аналітичних обчислень, оскільки в такому випадку застосування даного алгоритму втрачатиме доцільність.

4. Для кожної з n обраних точок на n поверхнях відповідних ділянок складаємо рівняння типу (10), в результаті чого отримуємо систему рівнянь у наступній формі:

$$\begin{cases} T_1 = \xi_1 \cdot \int\limits_{\Omega_1} \frac{d\,\Omega_1}{r_{1,1}} + \xi_2 \cdot \int\limits_{\Omega_2} \frac{d\,\Omega_2}{r_{1,2}} + \ldots + \xi_n \cdot \int\limits_{\Omega n} \frac{d\,\Omega_n}{r_{1,n}}, \\ T_2 = \xi_1 \cdot \int\limits_{\Omega_1} \frac{d\,\Omega_1}{r_{2,1}} + \xi_2 \cdot \int\limits_{\Omega_2} \frac{d\,\Omega_2}{r_{2,2}} + \ldots + \xi_n \cdot \int\limits_{\Omega n} \frac{d\,\Omega_n}{r_{2,n}}, \\ \ldots \\ T_n = \xi_1 \cdot \int\limits_{\Omega_1} \frac{d\,\Omega_1}{r_{n,1}} + \xi_2 \cdot \int\limits_{\Omega_2} \frac{d\,\Omega_2}{r_{n,2}} + \ldots + \xi_n \cdot \int\limits_{\Omega n} \frac{d\,\Omega_n}{r_{n,n}}. \end{cases} . \qquad (11)$$

Розв'язуємо систему (11) відносно невідомих показників умовної щільності виділення або поглинання теплової енергії ξ_j.

5. Одержані щільності ξ_j підставляємо функції (10), в результаті чого отримуємо можливість визначити температурні показники в усіх внутрішніх точках досліджуваного вузла конструкції, але в лише у області, обмеженій ділянками, одержаними при у умовному розбитті

(дискретизації).

Висновки та перспективи. Представлений алгоритм до побудови температурних полів у тілі конструктивних вузлів та елементів огороджувальних і внутрішніх конструкцій будівель та споруд є набагато простішим, ніж способи одержання дискретних температурних показників на основі використання чисельних методів розрахунків, які, окрім іншого, потребують застосування інтерполяційних методик. Відтак даний алгоритм дає змогу значно скоротити трудовитрати на побудову моделі й реалізації процесу розрахунку.

Слід також додати, що даний алгоритм представляє значний інтерес для подальших досліджень, оскільки може бути використаний при вирішенні не лише задачі пошуку температурних полів, а й у інших прикладних дослідженнях, зокрема при пошуку траєкторій витоку теплової енергії через містки холоду, визначені величини теплового потоку у будь-яких точках моделі, а також при підборі товщин утеплювача на різних ділянках поверхні огороджувальної конструкції шляхом аналізу інтенсивності тепловтрат та щільності силових ліній температурного поля. Вирішення перерахованих задач на основі даного алгоритму значно спрощується у зв'язку з неперервністю функції температурного поля, що одержується при підборі показників умовної щільності виділення або поглинання теплової енергії.

Література

1. Трушин С. И. Метод конечных элементов. Теория и задачи / С. И. Трушин. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 256 с.
2. Fenner R. T. Finite Element Method for Engineers / R. T. Fenner. – London: The Macmillan Press Ltd, 1975.
3. Oden J. T. An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements / J. T. Oden, J. N. Reddy. – New York – London: John Wiley & Sons, 1976.
4. Метод граничных элементов / А. Г. Угодчиков, Н. М. Хуторянский. – Казань: Издательство Казанского университета, 1986. – 297 с.
5. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 553 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 616 с.
7. Самарский А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с.
8. Плоский В. О. Геометричне моделювання деяких процесів тепломасообміну / В. О. Плоский, В. І. Скочко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – с. 285-295.

9. Скочко В. І. Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються у суцільному середовищі / В. І. Скочко // Дис. … конд. техн. наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2013. – 269 с.

10. Якусевич С. Г. Деякі аспекти ефективного влаштування пеплоізоляційної оболонки будинку / С. Г. Якусевич, В. О. Плоский // Енергозбереження в будівництві та архітектурі. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 9. – 8 с.

11. Пехович А. И. Расчёты теплового режима твёрдых тел. Изд. 2-е, перераб. и доп. / А. И. Пехович, В. М. Жидких. – Ленинград: «Энергия», 1976. – 352 с.

12. Фокин К. Ф. Строительная теплотехника ограждающих частей зданий. Изд. 3-е, перераб. и доп. / К. Ф. Фокин. – М.: Стройиздат, 1973. – 287 с.

13. Wong H. Y. Handbook of Essential and Data on Heat Transfer for Engineers / H. Y. Wong. – London – New York: Longman Group, 1977. – 216 p.

14. Соловьев А. К. Физика среды. Учебник / А. К. Соловьев. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 344 с.

15. Сергейчук О. В. Архітектурно-будівельна фізика / О. В. Сергейчук. – М.: Такі справи, 1999. – 156 с.

СПОСОБ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ КОНСТРУКТИВНЫХ УЗЛОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Якусевич С.Г.,
Плоский В.А.

В работе раскрываются принципы моделирования температурных полей на основе построения потенциальных функций температуры от условных источников и стоков тепловой энергии. При этом предлагается использование подхода, аналогичного тому, что применяется при моделировании изолиний и изоповерхностей потенциала электростатических полей.

METHOD OF REPRODUCTION OF TEMPERATURE FIELDS OF STRUCTURAL UNITS OF BUILDINGS AND STRUCTURES

Sergii. G. Yakusevych,
Vitalii O. Ploskyi

The article demonstrates the principles of modeling temperature fields based on the construction of potential temperature functions from conventional sources and heat energy sinks. In this case, we propose using an approach analogous to that used in the simulation of isolines and isosurfaces of the potential of electrostatic fields.