УДК 514.18

В.І. Скочко, к.т.н., доц.,
В.О. Плоский, д.т.н., проф

ДИФЕРЕНЦІЙНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ РУХУ ВУЗЛІВ СІТЧАСТИХ СТРУКТУР

Київський Національний Університет Будівництва і Архітектури, Україна

У роботі продемонстровано порядок одержання рівнянь динаміки руху вузлів сітчастих конструкцій, що перебувають під дією польових структур, у формі диференціальних закономірностей. Наводиться тлумачення енергетичної природи цих рівнянь. Сформульовані область та обмеження для застосування одержаних рівнянь стосовно задач моделювання механічних систем.

Постановка проблеми. Математичні моделі сітчастих структур широко використовуються для опису роботи та прогнозування розвитку багатьох фізичних та абстрактних систем. Однак виключно актуальними такі моделі стають при описі особливостей взаємодії багатокомпонентних складних систем, що можуть складатися з інших підсистем та впливати одне на одного, знаходячись водночас під дією множини зовнішніх чинників. Найбільш наочними та простим для розумінням прикладом таких систем є фізичні прототипи сітчастих структур – стрижневі конструкції, вільні вузли яких перебувають під навантаженням, що спричиняє розтяг і стиск її стрижнів, а зафіксовані (базові) вузли являються засобами передачі зовнішніх сил у середовище основи. З точки зору теорії систем вільні вузли сітчастої структури представляють собою точки сприйняття впливів від зовнішнього середовища, стрижні конструкції – є засобами обробки й інтерпретації цих впливів, а базові вузли – являються інструментом відгуку системи на зовнішні впливи й передачі проявів цього відгуку в зовнішнє середовище.

Моделювання стрижневих конструкцій відноситься до задач механіки і представляє собою один із найбільш розвинених напрямків сучасних науково-технічних досліджень у зв’язку зі стрімким розвитком інженерії, архітектури, машинобудування та інших прикладних галузей.

Механічна система може перебувати як у стані статичної рівноваги, так і у динамічному стані, в якому її параметри стану та положення змінюються з плином часу. Статичний і динамічний стани математичних моделей механічних систем можуть бути описані відповідними фізико-математичними залежностями, точність і коректність яких в подальшому впливатиме на точність і коректність роботи реальних систем і конструкцій в процесі їх експлуатації або взаємодії з реальним природним середовищем. Особливої уваги потребують динамічні системи, оскільки вони, як правило перебувають під впливом факторів, змінних у часі.

Формулювання цілей та завдання публікації. Опираючись на диференціальні закономірності між геометричними і фізичними параметрами сітчастих конструкцій, елементи яких змінюють свої положення та форму під дією польових структур, встановимо рівняння руху їх вузлів й сформулюємо область застосування та усі необхідні обмеження до цих рівнянь.

Огляд основних досліджень. У роботі [1] було встановлено основні диференціальні залежності між геометричними і фізичними параметрами сітчастих структур та векторних полів, що їх врівноважують. При цьому з механічної точки зору структури представляли собою аналоги безмоментних стрижневих конструкцій. Для тривимірної сітчастої структури одержані залежності для опису стану деякого *i*-го вільного вузла моделі утворювали наступну систему рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - x_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{xi} = 0\,, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - y_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{y_i} = 0\,, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - z_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{zi} = 0\,, \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}\cdot\delta_{i,j} - \varphi_i + G_i = 0\,, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}/\delta_{i,j} - \left(k/2\right)\cdot\rho_i\left(x_i, y_i, z_i\right) = 0\,, \qquad (5)$$

де: $R_{i,j}$ – абсолютне значення вектора зусилля $\overline{\mathbf{R}}_{i,j}$, що діє у стрижні, який сполучає даний *i*-й та деякий *j*-й вузли; $\overline{\Im}_i$ та φ_i – вектор поля зовнішніх сил та значення потенціалу цього поля у *i*-му вузлі моделі, які знаходяться у градієнтній залежності:

$$\overline{\Im}_i = \nabla\varphi_i\,; \qquad (6)$$

G_i – константа інтегрування; $\rho_i(x_i, y_i, z_i)$ – функція розподілу щільності джерел поля $\overline{\Im}_i$; k – константа, що відображає емпіричні властивості середовища, в якому розміщується стрижнева (сітчаста) структура, у випадку, коли вона інтерпретує фізичний процес; $\delta_{i,j}$ – довжина радіус-вектора $\overline{\boldsymbol{\delta}}_{i,j}$, проведеного від *i*-го до *j*-го вузла, що складає:

$$\delta_{i,j} = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2\right]^{1/2}. \qquad (7)$$

У роботах [2 – 8] було продемонстровано принципи використання рівнянь наведеної вище системи при вирішені задач прикладної геометрії та будівельної механіки.

Виклад основного матеріалу. Для того, щоб дослідити динаміку процесу руху окремих вузлів моделі й як наслідок зміну форми усієї сітчастої структури, почнемо з того, що складемо векторне рівняння руху довільного i-го вузла моделі у формі другого закону Ньютона [11]. Це рівняння включатиме рівнодійний вектор $\overline{\Im}_i$ (який може мати польову природу) усіх зовнішніх сил, прикладених до i-го вузла, вектори реакцій в'язей $\overline{\mathbf{R}}_{i,j}$, інцидентних цьому вузлу, а також вектор інерційної сили $\overline{\mathbf{F}}_i$:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\mathbf{R}}_{i,j} + \overline{\Im}_i = \overline{\mathbf{F}}_i \,. \qquad (8)$$

Якщо розглядати i-й досліджуваний вузол як матеріальну точку (приймаючи вагу сполучених з ним в'язей такою, що нею можна знехтувати, або що частку їх маси можна віднести до ваги самої матеріальної точки), то вектор $\overline{\mathbf{F}}_i$ визначатиметься за формулою:

$$\overline{\mathbf{F}}_i = m_i \cdot \overline{\mathbf{w}}_i \,, \qquad (9)$$

де m_i – вага i-го вузла, як матеріальної точки, а $\overline{\mathbf{w}}_i$ – вектор його прискорення:

$$\overline{\mathbf{w}}_i = w_{x_i} \cdot \overline{\mathbf{e}}_x + w_{y_i} \cdot \overline{\mathbf{e}}_y + w_{z_i} \cdot \overline{\mathbf{e}}_z \,. \qquad (10)$$

Враховуючи те, що прискорення $\overline{\mathbf{w}}_i$ знаходиться у диференціальному зв'язку з вектором швидкості $\overline{\mathbf{u}}_i$ та радіусом-вектором $\overline{\mathbf{r}}_i$, проведеним з початку координат до досліджуваного i-го вузла:

$$\overline{\mathbf{w}}_i = \frac{d\overline{\mathbf{u}}_i}{dt} = \frac{d^2 \overline{\mathbf{r}}_i}{dt^2} \,, \qquad (11)$$

проекції вектора $\overline{\mathbf{w}}_i$ на координатні осі можна записати наступним чином:

$$w_{x_i} = \frac{du_{x_i}}{dt} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \,, \qquad (12)$$

$$w_{x_i} = \frac{du_{x_i}}{dt} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \,, \qquad (13)$$

$$w_{x_i} = \frac{du_{x_i}}{dt} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \,. \qquad (14)$$

Тут радіус-вектор $\overline{\mathbf{r}}_i$ має форму:

$$\overline{\mathbf{r}}_i = x_i \cdot \overline{\mathbf{e}}_x + y_i \cdot \overline{\mathbf{e}}_y + z_i \cdot \overline{\mathbf{e}}_z \,. \qquad (15)$$

Звернемося до варіаційних принципів механіки [11] згідно з якими дійсний стан, рух або поточне положення елементів системи може відрізнятися від усіх кінематично можливих (тобто тих, що допускаються наявними в'язями). Одним із таких принципів є принцип Даламбера-Лагранжа, відповідно до якого для будь-якої механічної системи, що стримується ідеальними в'язями, сума елементарних робіт всіх активних сил і сил інерції в кожен даний момент часу має бути рівною нулю:

$$\sum_{i=1}^{k} (\overline{\Im}_i - \overline{\mathbf{F}}_i) \cdot \wp \overline{\mathbf{r}}_i = 0 \,. \qquad (16)$$

де $\wp \overline{\mathbf{r}}_i$ – віртуальне переміщення i-ї матеріальної точки. За цієї умови виконуватиметься рівність (8), а це означає, що слід вважати усі в'язі-стрижні, які сполучають кожен вузол моделі, ідеальними в’язями.

Базуючись на даному принципі, перепишемо рівняння (8) у проекціях на координатні осі з урахуванням тотожностей (12) – (14), виражаючи даламберові сили інерції через похідні від швидкості:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - x_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{xi} - m_i \cdot \frac{du_{xi}}{dt} = 0\,, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - y_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{y_i} - m_i \cdot \frac{du_{y_i}}{dt} = 0\,, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - z_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{zi} - m_i \cdot \frac{du_{zi}}{dt} = 0\,. \tag{19}$$

Ці ж рівняння можна переписати із вираженням даламберових сил інерції через похідні від координат (радіуса-вектора):

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - x_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{xi} - m_i \cdot \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0\,, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - y_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{y_i} - m_i \cdot \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0\,, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - z_i\right)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j} + \Im_{zi} - m_i \cdot \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0\,. \tag{22}$$

Системи рівнянь (17) – (19) та (20) – (22) представляють собою диференціальні рівняння руху вузлів сітчастої структури у полі сил $\overline{\Im}_i$.

Як і для рівнянь стану статичної рівноваги, систему рівнянь руху також можна записати єдиним рівнянням у векторній формі. Для цього відштовхуватимемось від наступних міркувань.

Як правило, для дослідження руху тіл у полі сил, спричинених реальними фізичними процесами, такими як, наприклад, рух у середовищі газів, рідин або у магнітному полі чи полі напруженості електричного струму, постійних чи електричних магнітів тощо, використовують способи Ейлера або Лагранжа. Перший спосіб передбачає дослідження зміни положення визначених матеріальних точок в певних ділянках простору при трансформації (русі) досліджуваного середовища у задані моменти часу (наприклад, коли мова йде про фрагменти течії рідин або газів). Другий спосіб є більш складним і вимагає застосування інтегральних методів розрахунку, оскільки передбачає дослідження поведінки одночасно усіх часток досліджуваної області, що неперервно змінюють свої координати.

Відтак, користуватимемось способом Ейлера. У різних точках простору поле зовнішніх впливів $\overline{\Im}$ утворює поле швидкостей $\overline{\mathbf{u}}$, для якого може бути застосована загальна теорія поля. Очевидно, що швидкість $\overline{\mathbf{u}}_i$ будь-якого i-го вузла являється функцією від його координат, а також від часу t:

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \varsigma(\overline{\mathbf{r}}_i, t) = u_{xi} \cdot \overline{\mathbf{e}}_x + u_{y_i} \cdot \overline{\mathbf{e}}_y + u_{zi} \cdot \overline{\mathbf{e}}_z \,. \qquad (23)$$

Відповідно й проекції вектора швидкості $\overline{\mathbf{u}}_i$ на координатні осі представлятимуть собою функції від координат та часу. Вони визначатимуться, як похідні від координат по часу:

$$u_{xi} = \varsigma_1(x_i, y_i, z_i, t) = \frac{dx_i}{dt}\,, \qquad (24)$$

$$u_{y_i} = \varsigma_2(x_i, y_i, z_i, t) = \frac{dy_i}{dt}\,, \qquad (25)$$

$$u_{zi} = \varsigma_3(x_i, y_i, z_i, t) = \frac{dz_i}{dt}\,. \qquad (26)$$

Спираючись на тотожність (11), запишемо залежність вектора прискорення $\overline{\mathbf{w}}_i$ від швидкості $\overline{\mathbf{u}}_i$ за правилом диференціювання складних функцій:

$$\overline{\mathbf{w}}_i = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial z_i} \cdot \frac{dz_i}{dt}\,. \qquad (27)$$

Вираз (27), із урахуванням рівностей (24) – (26), набуває такого вигляду:

$$\overline{\mathbf{w}}_i = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial x_i} \cdot u_{xi} + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial y_i} \cdot u_{y_i} + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial z_i} \cdot u_{zi}\,, \qquad (28)$$

а застосовуючи символічний запис оператора Гамільтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \overline{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \overline{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \overline{\mathbf{e}}_z\,,$$

його можна записати так:

$$\overline{\mathbf{w}}_i = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}}_i \nabla) \cdot \overline{\mathbf{u}}_i\,. \qquad (29)$$

Якщо застосовувати термінологію гідроаеродинаміки, то перша складова правої половини рівності (29) представляє собою локальне прискорення, яке характеризує зміну швидкості у часі в даній точці (або в нашому випадку в i-му вузлі), а друга складова – являється конвективним прискоренням, яке відображає зміну швидкості при переміщенні досліджуваного i-го вузла із однієї точки до іншої.

В роботі [1] було показано, що система рівнянь (1) – (3) може бути записана у векторній формі наступним чином:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{i,j} \cdot \nabla \delta_{i,j} - \nabla \varphi_i = 0\,. \qquad (30)$$

Очевидно, що із додаванням даламберових сил система (1) – (3) перетворюється в систему (17) – (19), яка, враховуючи формулу (29), у векторній формі може бути записана так:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{i,j} \cdot \nabla\delta_{i,j} - \nabla\varphi_i - m_i \cdot \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}}_i \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i \right) = 0 . \qquad (31)$$

Це рівняння описує рух довільного і-го вузла сітчастої структури в полі сил для загального випадку.

Однак, коли поле швидкостей є усталеним й не змінюється з плином часу, перший компонент правої частини рівності (29) дорівнює нулю:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial t} = 0 . \qquad (32)$$

В цьому випадку рівняння (31) спрощується й приймає форму:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{i,j} \cdot \nabla\delta_{i,j} - \nabla\varphi_i - m_i \cdot (\bar{\mathbf{u}}_i \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i = 0 . \qquad (33)$$

Рівняння (33) описує рух вузлів стрижневої конструкції при безвихровому потенційному русі в полі зовнішніх впливів $\bar{\Im}$.

Це рівняння можна дещо спростити на основі диференціальних перетворень векторного аналізу шляхом наступних міркувань [9]. Як відомо, якщо оператор Гамільтона ∇ стоїть перед добутком деяких функцій $\varsigma_1, \varsigma_2 \ldots \varsigma_N$ (векторних або скалярних), то даний оператор застосовується почергово до кожної з функцій (над нею в такому випадку ставиться знак $\downarrow$) і результати додаються. На основі цього правила градієнт скалярного добутку двох довільних векторів $\bar{\mathbf{v}}_1$ та $\bar{\mathbf{v}}_2$ становитиме:

$$\begin{aligned} \nabla(\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2) &= \nabla(\overset{\downarrow}{\bar{\mathbf{v}}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2) + \nabla(\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \overset{\downarrow}{\bar{\mathbf{v}}}_2) = \\ &= (\bar{\mathbf{v}}_2 \nabla) \cdot \overset{\downarrow}{\bar{\mathbf{v}}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2 \times (\nabla \times \overset{\downarrow}{\bar{\mathbf{v}}}_1) + (\bar{\mathbf{v}}_1 \nabla) \cdot \overset{\downarrow}{\bar{\mathbf{v}}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_1 \times (\nabla \times \overset{\downarrow}{\bar{\mathbf{v}}}_2) . \end{aligned} \qquad (34)$$

Якщо вектори $\bar{\mathbf{v}}_1$ та $\bar{\mathbf{v}}_2$ рівні й відповідають досліджуваному вектору швидкості $\bar{\mathbf{u}}_i$ (деякого i-го вузла) то рівняння (34), з урахуванням виразу (23), прийме наступну форму:

$$\begin{aligned} \nabla(\bar{\mathbf{u}}_i \cdot \bar{\mathbf{u}}_i) &= (\bar{\mathbf{u}}_i \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i + \bar{\mathbf{u}}_i \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}_i) + (\bar{\mathbf{u}}_i \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i + \bar{\mathbf{u}}_i \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}_i) = \\ &= 2 \cdot \left((\bar{\mathbf{u}}_i \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i + \bar{\mathbf{u}}_i \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}_i) \right) = \nabla(u_{x_i}^2 + u_{y_i}^2 + u_{z_i}^2) . \end{aligned} \qquad (35)$$

А враховуючи, що абсолютна величина вектора швидкості i-го вузла може бути обчислена за формулою:

$$u_i = (u_{x_i}^2 + u_{y_i}^2 + u_{z_i}^2)^{1/2} , \qquad (36)$$

виразимо з рівняння (35) величину конвектиного прискорення:

$$(\bar{\mathbf{u}}_i \nabla) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i = \nabla(u_i^2)/2 - \bar{\mathbf{u}}_i \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}_i) . \qquad (37)$$

Однак, якщо рух вузлів сітчастої структури носить потенціальний характер, то:

$$\bar{\mathbf{u}}_i \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}_i) = 0 , \qquad (38)$$

а значить, вираз (37) можна переписати в наступній формі:

$$(\bar{\mathbf{u}}_i\nabla)\cdot\bar{\mathbf{u}}_i=\nabla(u_i^2)/2\,. \tag{39}$$

Спираючись на тотожність (39), можна записати рівняння (33) для усталеного безвихрового потенціального руху таким чином:

$$\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}\cdot\nabla\delta_{i,j}-\nabla\varphi_i-(m_i/2)\cdot\nabla(u_i^2)=0\,. \tag{40}$$

По аналогії з тим, як в роботі [1] векторне рівняння (30) було перетворене в рівняння (4), можемо переписати рівняння (40), інтегруючи всі його компоненти. Одержимо:

$$\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}\cdot\delta_{i,j}-\varphi_i-(m_i/2)\cdot u_i^2+G_i=0\,, \tag{41}$$

де G_i – константа інтегрування, як і в формулі (4).

Рівняння (41) має енергетичний сенс. Перший його член характеризує енергію внутрішніх зусиль, що виникають у стрижнях внаслідок дії зовнішніх впливів $\bar{\mathfrak{I}}$. Другий член представляє собою потенційну енергію поля зовнішніх впливів $\bar{\mathfrak{I}}$, що випливає з умови їх потенціальності. Третій член представляє собою кінетичну енергію i-го вузла сітчастої структури, що має масу m_i та рухається зі швидкістю u_i. Наявність четвертого члена – константи G_i – дає можливість сформулювати рівняння (41), як закономірність з енергетичної точки зору, а саме: *при умові установленого руху сітчастої структури з ідеальними в'язями в полі потенційних сил, сума потенційної (положення й внутрішніх сил) та кінетичної енергії є величиною сталою*.

Окрім того, на основі рівнянь (17) – (19) та (40) можна одержати рівняння, аналогічне до (5) для стану статичної рівноваги, що дасть змогу встановити зв'язок між мірою джерел поля $\bar{\mathfrak{I}}$, геометричними параметрами й внутрішніми зусиллями у в'язях сітчастої структури. Щоб одержати відповідну залежність, знайдемо дивергенцію від усіх векторних компонентів рівнянь (17) – (19) або (40). Відповідно до [1], для перших двох членів зазначених рівнянь дивергенція матиме форму:

$$\sum_{j=1}^{n}\nabla\bar{\mathbf{R}}_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}\cdot\Delta\delta_{i,j}=2\cdot\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}/\delta_{i,j}\,, \tag{42}$$

$$\nabla\bar{\mathfrak{I}}_i=\nabla\left(\nabla\varphi_i\right)=\Delta\varphi_i=k\cdot\rho_i\left(x_i,y_i,z_i\right), \tag{43}$$

де Δ – позначення диференціального оператора Лапласа:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Дивергенція третього члена рівнянь (17) – (19), з урахуванням формули (36), становитиме:

$$\begin{aligned}\nabla(m_i\cdot\nabla(u_i^2)/2)&=(m_i/2)\cdot\nabla\left(\nabla u_i^2\right)=(m_i/2)\cdot\Delta u_i^2=\\&=(m_i/2)\cdot\Delta(u_{x\,i}^2+u_{y_i}^2+u_{z\,i}^2)\,.\end{aligned} \tag{44}$$

Відтак шукана залежність, з урахуванням тотожностей (42), (43) та (44), матиме наступну форму:

$$2\cdot\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}/\delta_{i,j}-k\cdot\rho_i(x_i,y_i,z_i)-(m_i/2)\cdot\Delta u_i^2=0\text{, або:}\qquad(45)$$

$$\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}/\delta_{i,j}-(k/2)\cdot\rho_i(x_i,y_i,z_i)-(m_i/4)\cdot\Delta(u_{xi}^2+u_{y_i}^2+u_{zi}^2)=0.\qquad(46)$$

Переписуючи рівняння (17) – (19), з урахуванням формули (39), та доповнюючи їх тотожностями (41) і (45), одержимо повну систему рівнянь усталеного безвихрового потенціального руху довільного вузла сітчастої структури, що відображає диференційний зв'язок між фізичними й геометричними параметрами моделі сітчастої структури та характеристиками полів зовнішнього впливу та швидкості зміни положення вузла у досліджуваній області середовища:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_i)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j}+\Im_{xi}-\dfrac{m_i}{2}\cdot\dfrac{\partial u_i^2}{\partial x_i}=0,\\ \sum_{j=1}^{n}(y_j-y_i)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j}+\Im_{y_i}-\dfrac{m_i}{2}\cdot\dfrac{\partial u_i^2}{\partial y_i}=0,\\ \sum_{j=1}^{n}(z_j-z_i)\cdot R_{i,j}/\delta_{i,j}+\Im_{zi}-\dfrac{m_i}{2}\cdot\dfrac{\partial u_i^2}{\partial z_i}=0,\\ \sum_{j=1}^{n}R_{i,j}\cdot\delta_{i,j}-\varphi_i-\dfrac{m_i}{2}\cdot u_i^2+G_i=0,\\ \sum_{j=1}^{n}R_{i,j}/\delta_{i,j}-\dfrac{k}{2}\cdot\rho_i(x_i,y_i,z_i)-\dfrac{m_i}{4}\cdot\Delta u_i^2=0.\end{cases}\qquad(47)$$

Висновки та перспективи. Одержана система рівнянь руху вільних вузлів сітчастих структур у механічній інтерпретації дає змогу не лише встановлювати положення вузлів моделей за заданим характером розподілу внутрішніх зусиль у в'язях у будь-який момент часу, а й може слугувати інструментом для вирішення обернених задач по відтворенню величин внутрішніх зусиль на основі аналізу інформації про геометричні параметри моделі, враховуючи початкові та крайові умови. Завдяки диференціальній природі одержаних рівнянь в якості початкових умов можуть виступати як координати вузлів у початковий або ряд попередніх моментів часу, так і значення векторів швидкості й прискорення. Як і рівняння статичної рівноваги, рівняння руху можуть дозволити вирішувати комплексні оптимізаційні задачі спрямовані на пошук геометричних і фізичних параметрів стрижневої конструкції шляхом корегування скалярних характеристик польових структур, а також інших цільових функцій (в тому числі на основі логічних операторів), які можуть бути введені до одержаних рівнянь в процесі їх адаптації та перетворення засобами теорії параметризації. При цьому наявність динамічної складової у одержаних рівняннях великою мірою розширює кількість параметрів варіювання, а також відкриває нові напрямки дослідження оптимізаційних цільових функцій.

Слід зауважити, що закономірності, представлені системою рівнянь руху у формі (47), можуть описувати зміну форми й положення вузлів сітчастих структур, що перебувають під впливом потенціальних полів, а сам рух має бути усталеним та безвихровим. Однак область застосування даної системи дуже широка, оскільки зазначені умови в багатьох випадках накладаються на поверхні технічних форм та конструкції, що перебувають під силовими динамічними навантаженнями, зокрема в інженерних задачах. У випадку, коли необхідно врахувати локальну складову прискорення, доцільніше використовувати рівняння руху в векторній формі (31). Щоправда, в цьому випадку побудова інтегральних рівнянь типу (41) стикається з рядом перешкод та невизначеностей.

Варто також додати, що, при необхідності, складові інерційних сил в рівняннях (47) можуть бути виражені й через координати вільних вузлів при застосуванні тотожностей (24) – (26) та (36). Для практичних розрахунків часткові похідні можуть бути замінені скінчено-різницквими співвідношеннями.

Література

1. *Скочко В. І.* Диференціальні закономірності між геометричними і фізичними параметрами сітчастих структур та полів, що їх врівноважують / *В. І. Скочко, Л. О. Скочко* // Основи і фундаменти. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 33. – с. 85-95.

2. *Скочко В. І.* Рівняння параметрів стану та положення в'язей сітчастих структур / *В. І. Скочко, Л. О. Скочко* // Основи і фундаменти. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 34. – с. 47-56.

3. *Скочко В. І.* Рівняння параметрів стану та положення в'язі, що сполучає вільний та закріплений вузли сітчастої структури / *В. І. Скочко* // Містобудування та територіальне планування. – К. : КНУБА, 2014. – с 521-527.

4. *Плоский В. О.* Побудова дискретних каркасів поверхонь із використанням рівнянь параметрів стану та положення в'язей сітчастих структур / *В. О. Плоский*, *В. І. Скочко* // Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті. Науковий журнал. Вип. 2. – Луцьк : ЛНТУ, 2014. – с 94-103.

5. *Скочко В. І.* Дискретна візуалізація плоских кривих, заданих функціями в неявній формі / *В. І. Скочко* // Містобудування і територіальне планування. Вип. 64. – К. : КНУБА, 2017. – 372-383.

6. *Плоский В. О.* Алгоритм управління параметрами в'язей сітчастих структур, на основі корегування величин скалярного потенціалу зовнішніх

впливів / *В. О. Плоский, В. І. Скочко* // Енергозбереження в будівництві та архітектурі. – К. : КНУБА, 2014. – Вип. 5. – с 224-230.

7. *Skochko V.*, 2015. Morphogenesis and correction of planar rod constructions with a small amount of free nodes. Motrol: Commis-sion of Motorization and Energetics in Agri-culture. Polish Academy of Sciences, Vol.17(8). 35-43.

8. *Kulikov P., Ploskiy O., Skochko V.*, 2014. The Principles of Discrete Modeling of Rod Constructions of Architectural Objects. Mo-trol: Commission of Motorization and Energet-ics in Agriculture. Polish Academy of Scienc-es, Vol.16 (8), 3-10.

9. *Бронштейн И. Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. перераб. / *И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев*; под ред. *Г. Гроше*, и *В. Циглера*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 976 с.

10. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / *А. А. Самарский*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 616 с.

11. *Яворский Б. М.* Справочник по физике: для инженеров и студентов. Изд. 7-е, испр. / *Б. М. Яворский, А. А. Детлаф.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 944 с., илл.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ УЗЛОВ СЕТЧАТЫХ СТРУКТУР

Скочко В.И., Плоский В.А.,

В работе продемонстрировано порядок получения уравнений динамики движения узлов сетчатых конструкций, находящихся под действием полевых структур, в форме дифференциальных закономерностей. Приводится толкование энергетической природы этих уравнений. Сформулированы область и ограничения для применения полученных уравнений относительно задач моделирования механических систем.

DIFFERENTIAL REGULARITIES OF THE NETWORK STRUCTURE NODES MOTION

Volodymyr I. Skochko, Vitalii O. Ploskyi

In this paper, we demonstrate the order of obtaining the equations of motion dynamics of the nodes of network constructions under the action of field structures in the form of differential regularities. The interpretation of the energy nature of these equations is given. The domain and constraints are formulated for applying the equations obtained with respect to modeling problems of mechanical systems.