

УДК 621.391

# ОСОБЕННОСТИ ТЕНЗОРНОГО НЕОРТОГОНАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОСТОЯННЫХ МЕТРИК

## Часть 1. Тензорное моделирование ТКС с использованием базисов контуров и путей



О.Ю. ЕВСЕЕВА

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

**Abstract** – A non-orthogonal modeling of telecommunication network is a separate area within the tensor approach. Although the scope of the non-orthogonal modeling is limited to the case of constant metrics, in this case the solution of applied problems can be obtained in an analytical form and the dimension of the problem can be reduced. According to the possible non-orthogonal bases, there are four types of non-orthogonal networks. Two of them - the circuit and the nodal networks - have been proposed by G. Kron, and therefore are the most widespread. This article is focused on the features of the modeling techniques by circuit network. A detailed analysis has allowed to develop the G. Kron's methodology and to propose a new type of non-orthogonal modeling technique - modeling by a network of paths. The network of paths is a generalization of the well-known circuit networks. Shown in the article numerical results indicate validity of the proposed technique. The circuit network and the proposed network of paths allow to solve the problem of calculation of the maximal intensity of traffic that can be delivered within a required value of end-to-end delay.

**Анотація** – У рамках тензорного підходу як окремий напрямок слід виділити моделювання телекомунікаційних мереж з використанням неортогональних базисів. У цьому випадку розв'язання прикладної задачі може бути отримано в аналітичному вигляді, а розмірність самої задачі значно знижена. У даній статті зосереджено увагу на особливостях методики моделювання з використанням базису контурів. Детальний її аналіз дозволив запропонувати новий тип неортогонального моделювання з використанням базису шляхів. Наведені у статті кількісні результати вказують на коректність запропонованої методики.

**Аннотация** – В рамках тензорного подхода как отдельное направление следует выделить моделирование телекоммуникационных сетей с использованием неортогональных базисов. В этом случае решение прикладной задачи может быть получено в аналитическом виде, а ее размерность значительно снижена. В данной статье внимание сосредоточено на анализе особенностей использования базиса контуров, что позволило предложить новый тип неортогонального моделирования с использованием базиса путей. Приведенные в статье численные результаты указывают на корректность предложенной методики.

## Введение

Принимая во внимание территориальную распределенность и высокую степень неоднородности сетевых элементов, а также множество выполняемых функций любая телекоммуникационная сеть (ТКС) может быть классифицирована как сложная организационно-техническая система, основным средством изучения которой

являются математические модели и методы [1]. Основным требованием к математической модели, используемой с целью анализа или синтеза (проектирования) ТКС, является ее адекватность, напрямую определяющая степень доверия к конечному расчетному результату. С другой стороны, сложность самой телекоммуникационной сети, ее многогранность, привела к тому, что на сегодняшний день общепринятым является оперирование совокупностью относительно несложных моделей, каждая из которых отражает отдельные аспекты и позволяет исследовать определенные свойства ТКС [1, 2]. В первую очередь речь идет о структурных и функциональных моделях, зачастую несвязанных между собой и использующих различные математические аппараты, нацеленные на решение разнородных задач. Тем не менее, такая разобщенность не только не способствует целостности описания, но и зачастую ведет к несогласованности получаемых технологических решений. Избежать подобных ошибок позволяет тензорный подход, который основывается на одновременном и взаимодополняющем использовании информации об особенностях как структурного, так и функционального построения ТКС [2].

В рамках тензорного подхода в моделировании ТКС можно выделить ряд направлений, которые отличаются, прежде всего, функциональным уравнением, положенным в основу тензорного обобщения, типом метрического тензора и используемыми в ходе решения прикладной задачи системами координат (базисами рассмотрения ТКС). Одно из возможных тензорных описаний ТКС представлено в работах [3 – 4]; его отличительная особенность заключается в использовании нелинейных метрик модели, определяя тем самым неоднородное поле метрического тензора. Это позволяет, например, получить в аналитическом виде строгие условия обеспечения качества обслуживания одновременно по нескольким разнородным – скоростным, временным показателям и показателям надежности при решении задач многопутевой маршрутизации [3 – 4]. Своеобразной платой за возможность найти более эффективное решение является усложнение математического описания и, как следствие, повышение вычислительной сложности конечных протокольных реализаций.

Упрощение расчетных процедур может быть достигнуто за счет принятия гипотезы о постоянстве метрического тензора и представления его координат известными постоянными числами [5]. В этом случае решение прикладной задачи, связанной, например, с оценкой длины очереди, средней задержки передачи пакетов или вероятности их доставки, может быть получено в аналитическом виде [5 – 9]. Более того, постоянный метрический тензор не только обеспечивает решение задачи в аналитическом виде, но и позволяет снизить ее размерность. Согласно классификации векторных пространств и, соответственно, систем координат [10], используемых в рамках тензорного моделирования ТКС, наряду с полноразмерными базисами, такими как базис ветвей  $B_v$ , контуров и узловых пар (разрезов)  $B_{\pi}$ , контуров и разрезов  $B_{\pi_0}$ , путей и внутренних разрезов  $B_{r\epsilon}$  размерности  $n$ , где  $n$  – число трактов передачи в моделируемой сети, существуют базисы подпространств более низкой размерности: контуров  $B_\pi$  (в полной формулировке – базис подпространства конту-

ров в рамках векторного пространства, определяемого структурой моделируемой сети), узловых пар  $B_\eta$ , разрезов  $B_\omega$ , путей  $B_r$ . Тензорные модели, построенные с их применением, называются неортогональными. Отметим, что основоположник тензорного анализа сетей Г. Крон [11] использовал термин «моделирование неортогональными сетями», подчеркивая тем самым, представление моделируемой структуры множеством неортогональных элементов, в качестве которых могут выступать контуры при моделировании контурной сетью или узловые пары – при моделировании узловой сетью. Именно эти два типа неортогональных сетей были предложены Г. Кроном и подробно описаны в работе [11], а впоследствии применены в работах [6 – 8] в контексте решения телекоммуникационных задач. Однако неортогональное моделирование не ограничивается лишь контурными и узловыми сетями.

Целью данной статьи является изложение методики тензорного моделирования ТКС в условиях постоянного метрического тензора с использованием при этом всех возможных неортогональных базисов более низкой размерности:  $B_\pi$ ,  $B_r$ ,  $B_\eta$  или  $B_\omega$ . Целесообразность использования того или иного типа базиса (сети) во многом зависит от характера решаемой сетевой задачи и, в свою очередь, всецело определяет как способ функционального описания ТКС, так и метод расчета искомых параметров.

## 1. Тензорные модели ТКС с использованием базиса контуров

Отличительной чертой моделирования ТКС посредством контурных сетей (моделирование  $\pi$ -сетями) является введение в структуру сети так называемых *мнимых* ветвей. Мнимые ветви вводятся в том случае, когда в структуре ТКС в анализируемом направлении связи отсутствует прямой тракт передачи и соответственно отсутствует ветвь между истоком и стоком, его моделирующая. Например, при рассмотрении ТКС в виде  $\pi$ -сети в ходе анализа процессов информационного обмена между узлами  $u_1$  и  $u_4$  (рис. 1, а) возникает необходимость введения между ними мнимой ветви  $v_6$  (рис. 1, б), ориентация которой соответствует направлению передачи трафика. С целью акцентирования внимания на том, что анализируется сеть именно с мнимой ветвью, в дальнейшем будут использоваться обозначения с верхним индексом «+». Тогда соответствующая контурная сеть (рис. 1, б) будет состоять из четырех узлов ( $m = 4$ ) и шести ветвей ( $n^+ = 6$ ), пять из которых являются физическими ( $n = 5$ ) и одна мнимой.

Заметим, что введение мнимой ветви было предложено Г. Кроном и является обязательным элементом его методики неортогонального моделирования [11]. Покажем, что введение мнимых ветвей не только не является необходимым условием для получения корректных количественных результатов, но и вносит некоторые неудобства: снижает наглядность тензорной модели и обуславливает дополнительные расчетные операции. С этой целью проведем детальный анализ методики моделирования ТКС посредством контурных сетей, основываясь на идеологии контурного моделирования Г. Крона.

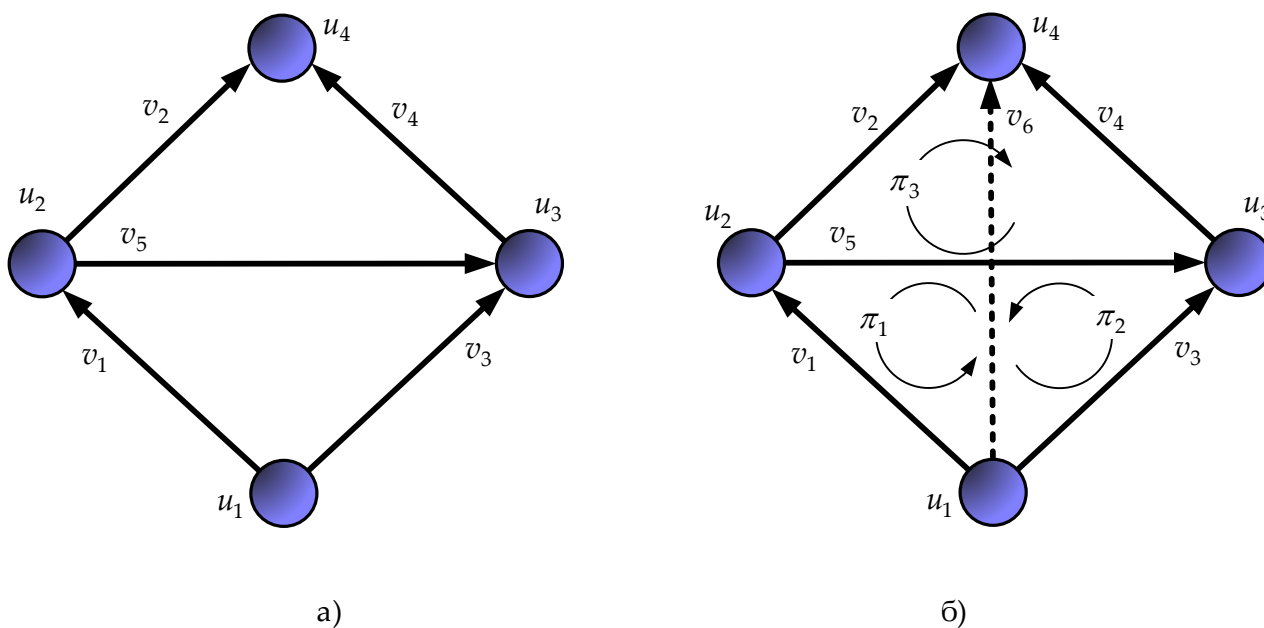


Рис. 1. Пример моделирования ТКС контурной сетью

Возьмем за основу подход, описанный в работах [3 – 4], где в качестве инварианта выступают тензорные уравнения

$$\Lambda = LT, \quad T = Y\Lambda, \quad (1)$$

где  $T$  – одновалентный ковариантный тензор средних задержек пакетов;  $\Lambda$  – одновалентный контравариантный тензор интенсивности потока пакетов;  $L$  – двухвалентный контравариантный тензор, выполняющий роль метрического тензора, т.е. определяющий свойства метрического пространства, связываемого с моделируемой ТКС, который с функциональной точки зрения определяет количественную зависимость между интенсивностью потока пакетов и их задержкой;  $Y$  – двухвалентный ковариантный метрический тензор.

В рамках неортогонального моделирования, следуя общей тензорной идеологии, уравнения (1) будут рассматриваться в той или иной системе координат. Как правило, используются две системы координат различных типов и размерностей: первая – система координат ветвей сети  $B_v$  размерности  $n$  (или  $n^+$  при добавлении мнимой ветви), а вторая – базис какого-либо подпространства с более низкой размерностью, например, базис подпространства контуров сети  $B_\pi$  в случае моделирования  $\pi$ -сетью. Тогда в первой системе координат в качестве координатных путей непосредственно выступают отдельные ветви сети, и все процессы, протекающие в ТКС, рассматриваются относительно ее трактов передачи, а во второй системе координат координатные пути представлены базисными контурами, и все функциональные переменные будут привязаны к этим контурам в структуре сети.

Для рассматриваемого примера (рис. 1, б) подпространство контуров имеет размерность  $\mu^+ = n^+ - m + 1 = 3$ , и для его построения необходимо выбрать остов  $\mathcal{T}$  сети [11], например, на ветвях  $v_2, v_4$  и  $v_6$ .

На хордах  $v_1, v_3$  и  $v_5$  остова  $\mathcal{T}$  построим три базисных контура (рис. 1, б):

$$\pi_1 = v_1 + v_2 - v_6, \pi_2 = v_3 + v_4 - v_6 \text{ и } \pi_3 = v_2 - v_4 - v_5. \quad (2)$$

Выбор базисных путей (2) определил следующий вид базисной матрицы контуров:

$$B_{\pi}^+ = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{Bmatrix},$$

в которой присутствует мнимая ветвь.

В соответствии с постулатом второго обобщения Г. Крона [11] инвариантные тензорные уравнения (1) сохраняют свою форму неизменной в различных базисах. В этой связи в системе координат контуров имеем

$$T_{\pi}^+ = Y_{\pi}^+ \Lambda_{\pi}^+, \quad (3)$$

где индекс «+» по-прежнему указывает на наличие мнимой ветви в сети,

$$\Lambda_{\pi}^+ = \begin{Bmatrix} \lambda_{(\pi)}^1 \\ \vdots \\ \lambda_{(\pi)}^i \\ \vdots \\ \lambda_{(\pi)}^{\mu^+} \end{Bmatrix}, \quad T_{\pi}^+ = \begin{Bmatrix} \tau_1^{(\pi)} \\ \vdots \\ \tau_i^{(\pi)} \\ \vdots \\ \tau_{\mu^+}^{(\pi)} \end{Bmatrix} \quad \text{– векторы соответственно интенсивности потока и средних за-}$$

держек пакетов при их передаче в контурах сети, представляющие собой проекции тензоров  $T$  и  $\Lambda$  в базисе контуров  $B_{\pi}$ ;  $Y_{\pi}^+$  – матрица проекции тензора  $Y$  в СК  $B_{\pi}$ .

На основании тензорного характера величин  $T$ ,  $\Lambda$  и  $Y$  по отношению к их проекциям в  $n^+$ -мерной системе координат ветвей  $B_v$  и в  $\mu^+$ -мерной системе координат контуров  $B_{\pi}$  справедливы следующие правила линейного преобразования [11]:

$$\Lambda_v^+ = (B_{\pi}^+)^t \Lambda_{\pi}^+, \quad (4)$$

$$T_{\pi}^+ = B_{\pi}^+ T_v^+, \quad (5)$$

$$Y_{\pi}^+ = B_{\pi}^+ Y_v^+ (B_{\pi}^+)^t, \quad (6)$$

где  $\Lambda_v^+$ ,  $T_v^+$ ,  $Y_v^+$  – проекции тензоров  $T$ ,  $\Lambda$  и  $Y$  в  $n^+$ -мерной системе координат ветвей, причем  $\Lambda_v^+$ ,  $T_v^+$  – векторы размера  $n^+$ , а  $Y_v^+$  – диагональная матрица, ненулевые элементы которой  $y_{ii}^{(v)}$  представляют собой метрики отдельных трактов передачи ТКС;  $(\bullet)^t$  – операция транспонирования.

Рассмотрим методику применения  $\pi$ -сетей для решения следующей задачи многопутевой маршрутизации: для заданной пары полюсов сети необходимо определить максимальную интенсивность потока и его распределение по трактам передачи ТКС, при которых величина средней межконцевой задержки пакетов не превышает допустимое значение. Т.е. в качестве *исходных данных* выступают:

1. Структура ТКС.
2. Диагональная матрица  $Y_v$ .
3. Направление передачи с указанием истока и стока в сети.
4. Допустимая величина межконцевой задержки пакетов  $\tau_{\langle don \rangle}$ .

Тогда, с учетом введенных обозначений, *искомым* является вектор  $\Lambda_v$ .

**Порядок расчета:**

Первый шаг расчетной процедуры связан с введением в сеть мнимой ветви с бесконечной пропускной способностью, а значит нулевой метрикой  $y_{ii}^{(v)}$ , что сопряжено с переходом к матрице  $Y_v^+$ , описывающей новую сеть размерности  $n^+$ . Введем вектор  $T_v^{\langle don \rangle}$  размера  $n^+$ , одна из координат которого, а именно соответствующая мнимой ветви, задает допустимую среднюю задержку пакетов  $\tau_{\langle don \rangle}$  между заданной парой узлов, но со знаком «минус». Хотя координаты вектора  $T_v^{\langle don \rangle}$  ассоциированы с ветвями сети, фактически этот вектор задает лишь направление передачи пакетов: элементы, не отвечающие заданному направлению, равны нулю, а элементы, соответствующие ветвям в направлении исток-сток, содержат требования к качеству его обслуживания. Например, для сети, представленной на рис. 1, б, данный вектор имеет координаты

$$T_v^{\langle don \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\tau_{\langle don \rangle} \end{pmatrix}.$$

Вектор  $T_v^{\langle don \rangle}$  может трактоваться как проекция тензора  $T$  в СК ветвей размерности  $n^+$ , тогда, зная этот вектор и матрицу  $Y_v^+$ , на основании (5) и (6) можно рассчитать координаты проекций один раз ковариантного тензора  $T$  и дважды ковариантного тензора  $Y$  в базисе контуров  $T_\pi^+$  и  $Y_\pi^+$ . Затем на основании (3) рассчитывается проекция тензора  $\Lambda$  в системе координат контуров сети

$$\Lambda_\pi^+ = [Y_\pi^+]^{-1} T_\pi^+. \tag{7}$$

Теперь согласно (4) могут быть рассчитаны искомые координаты проекции тензора  $\Lambda$  в СК ветвей сети, при этом координата вектора  $\Lambda_v^+$ , соответствующая за-

данному направлению передачи, определяет максимальную интенсивность, с которой поток пакетов может быть передан из истока в сток без превышения допустимой задержки. Остальные координаты вектора  $\Lambda_v^+$  определяют порядок распределения этого потока по трактам передачи сети, т.е. вектор  $\Lambda_v$ .

Задержки передачи пакетов в ветвях сети, представленные в виде координат вектора  $T_v$ , на основании инвариантного тензорного уравнения (1) рассчитываются согласно выражению

$$T_v = Y_v \Lambda_v. \quad (8)$$

Описанный порядок расчета может быть представлен в виде следующей алгебраической диаграммы (рис. 2).

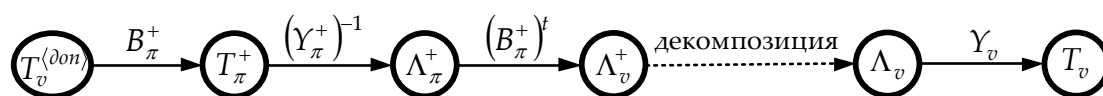


Рис. 2. Фрагмент алгебраической диаграммы расчета  $\pi$ -сети в соответствии с методологией Г. Крона

Рассмотрим пример применения изложенной методики расчета  $\pi$ -сетей. Пусть необходимо для сети (рис. 1, а) осуществить расчет максимальной интенсивности, с которой поток пакетов может быть передан от  $u_1$  к  $u_4$  со средней задержкой, не превышающей 1 с, если известны метрики  $y_{ii}^{(v)}$  отдельных трактов передачи сети (табл. 1).

Таблица 1. Метрики трактов передачи сети

Номер ветви	1	2	3	4	5
Метрика, $y_{ii}^{(v)} \cdot 10^{-3}$	0,0025	0,002	0,0033	0,0016	0,0025

Ввиду отсутствия физической ветви в анализируемом направлении передачи  $u_1 \Rightarrow u_4$  вводится мнимая ветвь  $v_6$  (рис. 1, б) с бесконечной пропускной способностью (нулевой метрикой). Тогда согласно данным табл. 1 проекцией тензора  $Y$  в базе ветвей является следующая матрица:

$$Y_v^+ = \begin{pmatrix} 0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$



В приведенной постановке задачи в качестве известной величины выступает допустимая межконцевая средняя задержка, т.е. задержка в мнимой ветви сети

$$T_v^{(don)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1]^t.$$

Тогда согласно выражению (5)

$$T_{\pi}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

а из уравнения (6) получаем

$$Y_{\pi}^+ = \begin{pmatrix} 0,0045 & 0 & 0,002 \\ 0 & 0,005 & -0,0017 \\ 0,002 & -0,0017 & 0,0062 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

По формуле (7) производим расчет:

$$\Lambda_{\pi}^+ = \begin{pmatrix} 264,05 & -31,37 & -94,12 \\ -31,37 & 223,53 & 70,59 \\ -94,12 & 70,59 & 211,76 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 232,68 \\ 192,16 \\ -23,53 \end{pmatrix} \cdot 10^3.$$

Окончательное решение задачи определяет расчет вектора (4):

$$\Lambda_v^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 232,68 \\ 192,16 \\ -23,53 \end{pmatrix} \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 232,68 \\ 209,15 \\ 192,16 \\ 215,69 \\ 23,53 \\ -424,84 \end{pmatrix} \cdot 10^3. \quad (10)$$

Значение шестого компонента вектора  $\Lambda_v^+$  определяет максимальную интенсивность потока ( $\approx 425$  тыс. пакетов в секунду), который можно передать между узлами  $u_1$  и  $u_4$  данной сети с межконцевой задержкой не больше 1 с. Причем для передачи пакетов предполагается задействовать три пути:

$u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_4$  для передачи пакетов с интенсивностью  $209,15 \cdot 10^3$  1/с;

$u_1 \mapsto u_2 \mapsto u_3 \mapsto u_4$  для передачи пакетов с интенсивностью  $23,53 \cdot 10^3$  1/с;

$u_1 \mapsto u_3 \mapsto u_4$  для передачи пакетов с интенсивностью  $192,16 \cdot 10^3$  1/с.



## II. Тензорные модели ТКС с использованием базиса путей

Следует обратить внимание, что в рассмотренном примере (рис. 1, б) координата вектора  $\Lambda_v^+$ , отвечающая мнимой ветви, которой в реальной сети не существует (рис. 1, а), имеет отрицательное значение. Для того чтобы понять данный факт и, собственно, причины введения  $\Gamma$ . Кроном мнимой ветви, вернемся к рассмотренному примеру. В первую очередь проанализируем число контуров сети после введения мнимой ветви

$$\mu^+ = n^+ - m^+ + 1 = (n + 1) - m + 1 = n - m + 2 = \mathbf{dim}(W_r),$$

где  $W_r$  – подпространство путей в векторном пространстве исходной (до введения мнимой ветви) структуры сети, а  $\mathbf{dim}(W_r)$  – его размерность [10].

Получается, что число контуров для сети с мнимой ветвью равно числу базисных путей исходной сети, т.е. размерности подпространства  $W_r$ . Тогда можно предположить, что выражения (3) – (7) принадлежат к подпространству путей. Проверим, действительно ли это так. Для этого в базисной матрице  $B_\pi^+$  удалим мнимую ветвь (вычеркнем столбец, отвечающий этой ветви). Если получаемая при этом матрица будет представлять собой базисную матрицу подпространства путей  $W_r$ , то

предположение верно. Для рассматриваемого примера имеем  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ , где

первая строка соответствует пути  $\gamma_1 = v_1 + v_2$ , вторая пути  $\gamma_2 = v_3 + v_4$ , а третья, как и прежде, контуру  $\pi_3 = v_2 - v_4 - v_5$  (рис. 3, а). Полученное множество путей  $\{\gamma_1, \gamma_2, \pi_3\}$  является линейно независимым и представляет собой один из возможных вариантов базиса подпространства путей  $W_r$ .

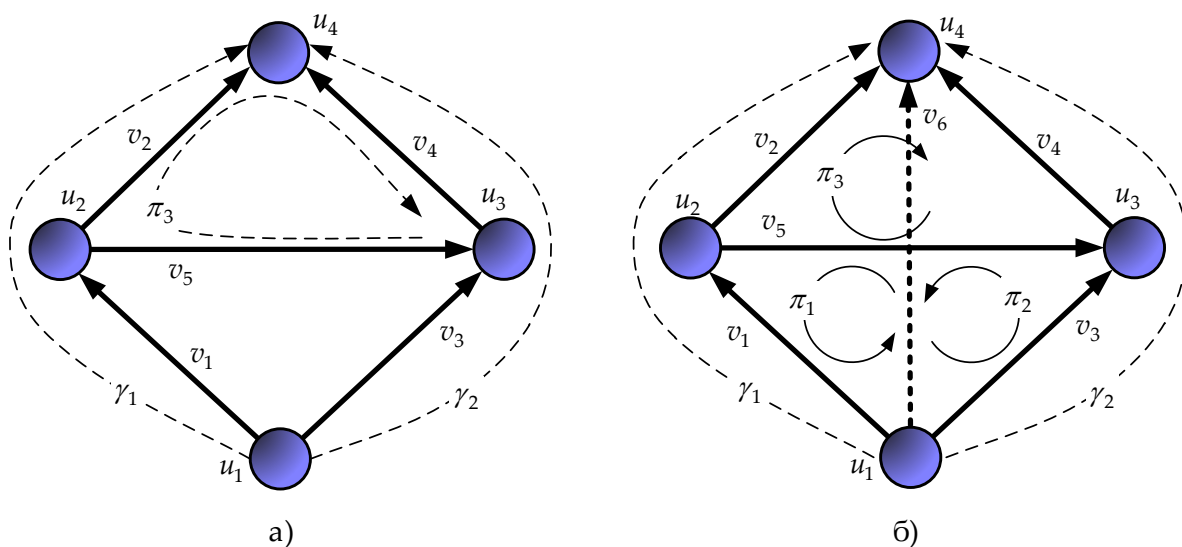


Рис. 3. Соответствие между базисными элементами одномерной сети без мнимой ветви и при ее наличии

Сравнив базисные элементы  $\{\gamma_1, \gamma_2, \pi_3\}$  с ранее используемым множеством контуров, имеем  $\pi_1 = \gamma_1 - v_6$  и  $\pi_2 = \gamma_2 - v_6$  (рис. 3, б). Получается, что введение мнимой ветви «замыкает» пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , преобразуя их в контурные элементы  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . С другой стороны, для контурных компонентов проекции тензора задержек имеем  $\tau_i^{(\pi)} = 0$ , что обусловлено требованием отсутствия петель в маршрутах и одинаковой средней задержки пакетов вдоль каждого из них. Например, для контура  $\pi_1$ , состоящего из пути  $\gamma_1$ , замкнутого посредством мнимой ветви, можно записать  $\tau_1^{(\pi)} = \tau_1^{(\gamma)} + \tau_6^{(v)} = 0$ , откуда  $\tau_1^{(\gamma)} = -\tau_6^{(v)}$ , что объясняет отрицательное значение  $\tau_6^{(v)} = -\tau^{don}$  при формировании вектора  $T_v^+$ . Аналогично, для второго контура  $\tau_2^{(\pi)} = \tau_2^{(\gamma)} + \tau_6^{(v)} = 0$  и  $\tau_2^{(\gamma)} = -\tau_6^{(v)}$ .

Поскольку пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются межполюсными, т.е. соединяющими сток с истоком, задержки вдоль них  $\tau_1^{(\gamma)}$  и  $\tau_2^{(\gamma)}$  должны быть равны допустимой межконцевой задержке  $\tau_{\langle don \rangle}$ , а задержка в третьем контуре  $\tau_3^{(\pi)}$  должна быть нулевой. Именно этот принцип и иллюстрирует вектор  $T_\pi^+$  (9) для рассматриваемого примера:

$$T_\pi^+ = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|^t = \left\| \begin{matrix} \tau_{\langle don \rangle} & \tau_{\langle don \rangle} & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \tau_1^{(\gamma)} & \tau_2^{(\gamma)} & \tau_3^{(\pi)} \end{matrix} \right\|^t.$$

Другими словами, данный вектор представляет собой проекцию тензора средних задержек  $T$  в базисе путей размерности  $\kappa = n - m + 2 = \mathbf{dim}(W_r)$ , где в качестве координатных осей выступают два межполюсных пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и один контур  $\pi_3$  (рис. 3, а).

Таким образом, введение мнимой ветви и анализ сети размерности  $n^+$  эквивалентно рассмотрению исходной сети в подпространстве путей  $W_r$ , создаваемом множеством всех путей в структуре моделируемой сети. Причем  $W_r$  включает в себя как множество разомкнутых путей, в т.ч. межполюсных, так и замкнутых (контуров). Т.е. с точки зрения вложенности подпространство путей  $W_r$  содержит в себе подпространство контуров [10]. По аналогии с моделированием контурной сетью назовем рассмотрение ТКС в системе координат путей моделированием сетью путей или  $r$ -сетью.

При моделировании  $r$ -сетью к рассмотрению будут приняты две системы координат: ветвей  $B_v$  размерности  $n$  и путей  $B_r$  размерности  $\kappa$ , а в качестве функционального инварианта по-прежнему выступает тензорное уравнение (1), которое согласно второму постулату Г. Крона сохраняет свою форму неизменной во всех системах координат. Тогда в базисе путей  $B_r$  имеем

$$T_r = Y_r \Lambda_r, \tag{11}$$

где  $\Lambda_r = \begin{pmatrix} \lambda_{(r)}^1 \\ \vdots \\ \lambda_{(r)}^i \\ \vdots \\ \lambda_{(r)}^k \end{pmatrix}$ ,  $T_r = \begin{pmatrix} \tau_1^{(r)} \\ \vdots \\ \tau_i^{(r)} \\ \vdots \\ \tau_k^{(r)} \end{pmatrix}$  – векторы соответственно интенсивности потока и средних

задержек передачи пакетов в базисных путях сети, представляющие собой проекции тензоров  $T$  и  $\Lambda$  в базисе путей;  $Y_r$  – матрица проекции тензора  $Y$  в базисе  $B_r$ .

Проекции тензоров  $T$ ,  $\Lambda$  и  $Y$  в  $n$ -мерной системе координат ветвей  $B_v$  и в  $k$ -мерной системе координат путей  $B_r$  связаны следующими правилами координатного преобразования:

$$\Lambda_v = (B_r)^t \Lambda_r, \quad (12)$$

$$T_r = B_r T_v, \quad (13)$$

$$Y_r = B_r Y_v (B_r)^t, \quad (14)$$

где  $B_r$  – матрица базисных путей.

На основании соотношений (11) – (14) может быть формализован тензорный метод расчета  $r$ -сетей, обеспечивающих решение ранее сформулированной задачи многопутевой маршрутизации: для заданной пары полюсов сети необходимо определить максимальную интенсивность потока и его распределение по трактам передачи ТКС, формализованные в виде вектора  $\Lambda_v$ , при которых величина межконцевой задержки передачи пакетов не превышает допустимое значение  $\tau_{(don)}$ . По прежнему предполагается известной диагональная матрица  $Y_v$ , содержащая метрики отдельных трактов передачи ТКС.

#### **Порядок расчета:**

Первый шаг решения связан с выбором в заданной структуре сети множества базисных путей и формированием соответствующей матрицы  $B_r$ . Затем формируется вектор  $T_r$  размера  $k$ , в котором элементы, соответствующие межполюсным путям, приравниваются допустимой средней задержке пакета  $\tau_{(don)}$ , а элементы, соответствующие контурам, устанавливаются нулевыми. На основании заданной матрицы  $Y_v$ , используя (14), может быть рассчитана матрица  $Y_r$ . Тогда из (11) имеем

$$\Lambda_r = [Y_r]^{-1} T_r, \quad (15)$$

или

$$\Lambda_r = L_r T_r, \quad (16)$$

где  $L_r = [Y_r]^{-1}$  – матрица размера  $k \times k$ , которую можно трактовать как проекцию двухвалентного контравариантного тензора  $L$  (1) в базисе  $B_r$ .

Затем, применив последовательно формулы (12) и (8), получим сначала иско-  
мые координаты проекции  $\Lambda_v$  тензора  $\Lambda$  в СК ветвей сети, а затем задержки пере-  
дачи пакетов в ветвях сети, представленные в виде координат вектора  $T_v$ . Соответ-  
ствующая алгебраическая диаграмма представлена на рис. 4.

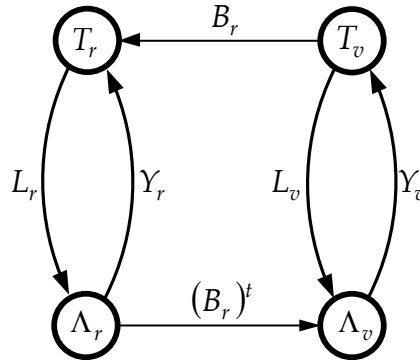


Рис. 4. Фрагмент алгебраической диаграммы расчета  $r$ -сети

Рассмотрим применение методики (11) – (16) на примере прежней сети  
(рис. 1) с теми же исходными данными: необходимо осуществить расчет максималь-  
ной интенсивности потока пакетов, которые могут быть переданы от  $u_1$  к  $u_4$  со  
средней межконцевой задержкой не более 1 с, если метрики ветвей известны  
(табл. 1).

В первую очередь формируется базисное множество путей, число которых для  
заданной сети равно  $\kappa=3$ . В качестве базисных путей выберем, например,  $\gamma_1 = v_1 + v_2$ ,

$\gamma_2 = v_3 + v_4$ ,  $\gamma_3 = v_1 + v_5 + v_4$  (рис. 5), что соответствует матрице  $B_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

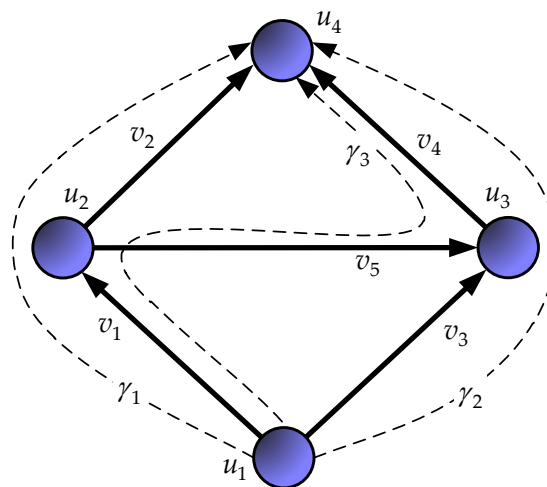


Рис. 5. Пример неортогональной одномерной  $r$ -сети

Тогда на основании данных табл. 1 и выражения (14) может быть получена проекция тензора  $Y$  в базисе путей:

$$Y_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0025 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t,$$

$$Y_r = \begin{pmatrix} 0,0045 & 0 & 0,0025 \\ 0 & 0,0050 & 0,0017 \\ 0,0025 & 0,0017 & 0,0067 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

При формировании вектора проекции тензора  $T$  в системе координат путей  $B_r$  будем исходить из того, что все выбранные базисные элементы являются межпотоковыми путями, а потому все координаты вектора  $T_r$  будут равны  $\tau_{\langle \text{дон} \rangle}$ :

$$T_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (15) получаем:

$$\Lambda_r = \left[ \begin{pmatrix} 0,0045 & 0 & 0,0025 \\ 0 & 0,0050 & 0,0017 \\ 0,0025 & 0,0017 & 0,0067 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 209,15 \\ 192,16 \\ 23,53 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

тогда в качестве окончательного решения задачи из (12) имеем:

$$\Lambda_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 209,15 \\ 192,16 \\ 23,53 \end{pmatrix} \cdot 10^3 = \begin{pmatrix} 232,68 \\ 209,15 \\ 192,16 \\ 215,69 \\ 23,53 \end{pmatrix} \cdot 10^3. \quad (17)$$

Сопоставление результата (17), полученного в ходе моделирования  $r$ -сетью, с решением (10), полученным в рамках контурной сети, указывает на их полную идентичность: (10) и (17) определяют один и тот же порядок многопутевой маршрутизации, и в обоих случаях максимальная интенсивность потока между узлами  $u_1$  и  $u_4$  составляет приблизительно 425 тыс. пакетов в секунду при допустимой средней задержке пакета  $\tau_{\langle \text{дон} \rangle}$  не более 1 с.

## Выводы

Таким образом, в рамках тензорного подхода как отдельное направление следует выделить моделирование ТКС неортогональными сетями. Хотя область применения неортогональных сетей ограничивается случаем постоянных метрик, в этом случае решение прикладной задачи может быть получено в аналитическом виде, а размерность самой задачи значительно снижена, поскольку число базисных контуров  $(n - m + 1)$  или базисных путей  $(n - m + 2)$  всегда меньше, и зачастую существенно меньше общего числа трактов передачи в ТКС  $(n)$ .

В соответствии с возможными неортогональными базисами контуров  $B_\pi$ , узловых пар  $B_\eta$ , разрезов  $B_\omega$  и путей  $B_r$  подпространств в векторном пространстве, определяемом структурой ТКС, можно выделить четыре типа неортогональных сетей. Два из них – контурные и узловые – были предложены Г. Кроном, и потому являются наиболее распространенными. В данной статье внимание было сосредоточено на особенностях методики моделирования контурной сетью. Детальный ее анализ позволил развить методику Г. Крона и предложить новый тип неортогонального моделирования с использованием базиса путей. В рамках предлагаемого подхода удалось избежать искусственного введения дополнительной мнимой ветви и тем самым несколько упростить тензорную неортогональную модель и повысить ее прозрачность. Приведенные в статье численные примеры указывают на корректность предложенной методики.

Тензорные неортогональные модели с использованием базисов контуров и путей позволили решить задачу расчета максимальной интенсивности потока пакетов и определения порядка его маршрутизации при заданной величине межконцевой задержки. Обратная постановка задачи – многопутевой маршрутизации потока пакетов заданной интенсивности, при которой обеспечивается наименьшая межконцевая задержка, требует применения других систем координат: узловых пар или разрезов, в рамках, соответственно, узловых сетей и сетей разрезов, особенностям применения которых будет посвящена вторая часть данной статьи.

## Список литературы:

1. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем / В.В. Поповський, С.О. Сабурова, В.Ф. Олійник, Ю.І. Лосєв, Д.В. Агєєв та ін.: За загал. ред. В.В. Поповського. – Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 564 с.
2. Лемешко А.В., Евсеева О.Ю., Чечуй А.В. Категориально-тензорное представление телекоммуникационной системы // Наукові записки УНДІЗ. – 2008. – №2(4). – С. 3-15.
3. Лемешко А.В., Евсеева О.Ю. Тензорная модель многопутевой маршрутизации с гарантиями качества обслуживания одновременно по множеству разнородных показателей [Электронный ресурс] // Проблемы телекоммуникаций. – 2012. – № 4 (9). – С. 16 – 31. – Режим доступа: [http://pt.journal.kh.ua/2012/4/1/124\\_lemeshko\\_tensor.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2012/4/1/124_lemeshko_tensor.pdf).
4. Lemeshko O.V., Yevseyeva O.Yu., Garkusha S.V. A Tensor Model of Multipath Routing Based on Multiple QoS Metrics // 2013 International Siberian Conference on Control and Commu-

nications (SIBCON). Proceedings. – Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12–13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR. – P. 1 – 4.

5. *Евсеева О.Ю.* Исследование метрических свойств тензорных моделей при решении сетевых задач // Моделивання та інформаційні технології: зб. наук. праць. – 2009. – Вип. 54. – С. 81 – 94.

6. *Стрелковская И.В., Соловская И.Н.* Использование тензорного метода при расчете ТКС, представленной узловой сетью [Электронный ресурс] // Проблемы телекоммуникаций. – 2010. – № 1 (1). – С. 68 – 75. – Режим доступа к журн.: [http://pt.journal.kh.ua/2010/1/1/101\\_strelkovskaya\\_tensor.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2010/1/1/101_strelkovskaya_tensor.pdf).

7. *Лемешко А.В., Тимочко А.И., Кравчук А.А.* Вероятностная тензорная модель телекоммуникационной системы, представленной одномерной контурной сетью // Системы обработки информации: зб. наук. праць. – 2004. – Вип. 12 (40). – Х.: ХВУ. – С. 118 – 127.

8. *Пономарев Д. Ю.* Исследование характеристик пакетных сетей узловым методом тензорного анализа // Программные продукты и системы. – 2009. – Вып. 4. – С. 65 – 69.

9. *Лемешко А.В., Вавенко Т.В.* Усовершенствование потоковой модели многопутевой маршрутизации на основе балансировки нагрузки [Электронный ресурс] // Проблемы телекоммуникаций. – 2012. – № 1 (6). – С. 12 – 29. – Режим доступа до журн.: [http://pt.journal.kh.ua/2012/1/1/121\\_lemeshko\\_multipath.pdf](http://pt.journal.kh.ua/2012/1/1/121_lemeshko_multipath.pdf).

10. *Евсеева О.Ю.* Классификация пространств и базисов, используемых при геометрическом описании структуры телекоммуникационной сети // Радиотехника: Всеукр. межведомств. науч.-техн. сб. – 2009. – Вып. 159. – С. 14 – 19.

11. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 719 с.