The main academic block is formed from separate statements of performative text, which are sequentially numbered and placed in the text in accordance with the logical order of their presentation, providing a transition from one type of knowledge to other. Additional academic unit consists of didactic materials of philosophical and scientific-popular character that expand, complement, promote, influence the emotional and sensual sphere of the student, thereby making the mechanism of perception easier. Signal academic unit consists of performative statements (rules and regulations) that contain especially important information for the student, which should be remembered or paid particular attention. Applied academic unit serves as an example of solving a particular problem or situation in life safety and is separated from the statements of the main academic block and performative text by the headings "Example" or "Task".

The number of additional, signal and application blocks within the main academic block, their size and rotation sequence (knowledge transfer from one to the other) may be different; it is determined by the logic of presenting educational material and didactic expediency.

As a result a student-centered approach to learning and increased efficiency of learning is achieved.

Keywords: ternary matrix of knowledge; information flow; academic block; performative text; student-centered approach.

УДК 37.013.3

БАГАТОРІВНЕВІ ПОНЯТТЯ – БАЗОВІ СКЛАДОВІ НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ ТА НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ (НА ПРИКЛАДІ ТЕОРЕМИ ПІФАГОРА)

Г. В. Жабєєв,
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри програмної інженерії Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова,
e-mail: g.v.zhabieiev@npu.edu.ua
П. В. Жабєєв,
Ph.D., Університет Альберти (м. Едмонтон, Канада),
e-mail: pvzh@hotmail.com

У статті розглядається приклад створення багаторівневих понять, наскрізне застосування яких у навчально-виховному процесі є однією з запорук успішної реалізації українського варіанту концепції "Школа майбутнього".

Обґрунтовується доцільність застосування багаторівневих понять, кожне з яких має принаймні п'ять рівнів складності. Прикладом для створення багаторівневого поняття обрано теорему Піфагора. Її пряме, обернене та протилежне формулювання є базою для традиційних формулювань, які повністю або частково трансформують структуру, об'єм і зміст відповідного вихідного формулювання; маєвтичних формулювань, які створені за допомогою вчителя; емерджентних формулювань, які створені учнем як інсайт-означення і адекватно відображають рівень знань і компетентності їх автора.

Ключові слова: навчальна програма; інтерпретація; багаторівневі поняття; теорема Піфагора; пряме, обернене, протилежне, індивідуально-рівневі формулювання.

Постановка проблеми. Світова спільнота прагне модернізувати (адаптувати) наявні або створювати нові системи освіти, кожна з яких би максимально відповідала вимогам суспільства й особистості. Саме це й спрямовує зусилля науковців і практиків на пошук нових шляхів, умов і/або моделей її розвитку та вдосконалення [14].

Одним із варіантів реалізації цього шляху є застосування багаторівневих понять, що є тим стрижнем, навколо якого, а частково і завдяки якому, розвивається змістова лінія: від структури, об'єму та змісту навчальної програми до учня – кінцевого продукту системи освіти.

Структура, об'єм і зміст навчальних програм, принаймні природничо-математичного циклу загальноосвітніх навчальних закладів (ЗНЗ), базується на поняттях, які на погляд авторів програми та інституцій, що їх презентують, є істинними для поточного та найближчого відрізків часу. При цьому найчастіше застосовуються поняття одного рівня, об'єм і зміст яких вважаються вихідними (еталонними, базовими).

Дворівневі поняття, наприклад пряме та обернене формулювання теореми Піфагора (ТП), застосовуються у підручниках [1, с. 140–141; 3, с. 32–33]. При цьому у кожному випадку застосовуються авторські варіанти інтерпретування понять термінології часів Евкліда [8].

У подальшому інтерпретацію структури, об'єму і змісту понять, наведених у навчальних програмах та навчально-методичному забезпеченні, здійснюють популяризатори, наприклад вчителі, викладачі, репетитори, автори тестових завдань тощо [10]. При цьому учні або абітурієнти, а іноді й студенти, достатньо часто формулюють регламентовані навчальною програмою та підручниками дефініції як індивідуально-рівневі (ситуативні).

Саме ці дефініції відображають рівень знань, розумінь, уявлень, компетенцій їх авторів.

Таким чином, на кожному кроці інтерпретації різною мірою виконуються її базові положення: правильність (несуперечливість), повнота або частковість [9, с. 204.2-205.2], індивідуальність, ситуативність.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Базою вітчизняних підручників з геометрії [1, 2] є академічне видання (1948–1951 рр.) праць Евкліда у перекладі Д. Д. Мордухай-Болтовського за редакційною участю М. Я. Вигодського та І. Н. Веселовського [8].

Одне з ретельних, на наш погляд, досліджень властивостей ТП виконане В. Литцманом – німецьким вченим і популяризатором математики [10]. За твердженням редактора цього дослідження І. М. Яглома (1921–1988), воно, насамперед, орієнтоване на учнів старших класів і вчителів.

Переваги цього дослідження, відносно [8]: зміст праці Евкліда у частині ТП викладений сучасною мовою; варіанти доведення ТП коментуються, порівнюються, аналізуються, супроводжується багатьма прикладами і вправами з дидактичним навантаженням. Останнє, також на наш погляд, є найбільш корисним для самоосвіти і/або викладання.

До недоліків дослідження [10] порівняно з [4] можна зарахувати орієнтацію лише на планіметрію рівня “Математичний клас/гурток ЗНЗ”. У той же час дослідження [4] орієнтоване на рівень “бакалавр” “магістр” Ювдалу мету перекладу: “... приспособить “Начала” Евкліда к школьному обиходу ...”; ми інтерпретуємо цей уривок висловлювання наступним чином: “... гармонізувати мову праць Евкліда з сучасною педагогічною термінологією ...”;

Вважаємо за доцільне звернути увагу читачів на скорочений та частково інтерпретований переклад восьми книг Евкліда з німецького видання 1860 року. Переклад російською мовою було здійснено Немировським і Бергером – вихованцями Олександрівського Кременчуцького реального училища під керівництвом директора училища О. А. Соковича [5, с. 467–474].

І. Я. Депман (1885–1970), автор дослідження (1950) цього перекладу, відмічає:

- вдалу мету перекладу: «... приспособить «Начала» Евкліда к школьному обиходу ...»; ми інтерпретуємо цей уривок висловлювання наступним чином: «... гармонізувати мову праць Евкліда з сучасною педагогічною термінологією ...»;
- високий рівень перекладу і систематизації матеріалу, наявність таблиць (9 одиниць) і чудово виконаних креслень (232 фігури).

Детальне дослідження цього джерела виходить за межі статті. Це царина істориків математики. Однак ми особисто вдячні І. Я. Депману, педагогу, методисту, історику математики, популяризатору наукових знань, за те, що він відкрив (принаймні нам) гідних уваги вітчизняних дослідників та популяризаторів праць Евкліда.

Формулювання цілей статті (постановка завдання).

1. Розглянути та порівняти варіанти узагальнень, інтерпретувань, тлумачень ТП з точки зору вимог наступних щаблів освіти: "ЗНЗ $\leftrightarrow$ Абітурієнт ВНЗ педагогічного, технічного або академічного спрямування".

2. Звернути увагу вчителів/викладачів, учнів, абітурієнтів на недостатній комплексний взаємозв'язок між очевидними фактами:

а) будь-яке твердження, означення, теорема, узагальнення, стверодно-аргументоване судження, що складається з обмеженого числа однозначно визначених термінів, можна або перефразувати, або піддати операціям "інтерпретація" або "тлумачення" і, тим самим, створити авторське бачення структури, об'єму і змісту першоджерела;

б) викладачеві відповіді учня типу "як у підручнику або як у словнику" найпростіше (і найбезпечніше!) оцінювати більш високим балом, ніж авторські, індивідуальні формулювання.

3. Показати, як на базі структури, об'єму і змісту одного поняття (наприклад, ТП) можна створювати багаторівневе поняття (ε-поняття), забезпечуючи при цьому відповідність ε-поняття першоджерелу та шкалі оцінки знань мінімум з п'ятьма рівнями складності [12].

4. Продемонструвати один зі шляхів підвищення культури мислення, висловлювання, ефективності ситуативного (різнорівневого) спілкування або за допомогою еталонних термінологічних одиниць, понять, категорій, або з використанням їх еквівалентів (варіантів інтерпретацій, тлумачень).

Виклад основного матеріалу дослідження

Частина № 1. Вибір ТП як прикладу багаторівневого поняття можна обґрунтовувати, посилаючись на багато чинників, але обмежимося лише трьома.

1.1. ТП сама по собі не є очевидною. Очевидним є те, що трикутник прямокутний. Однак не є очевидним співвідношення між квадратами довжин його сторін ($c^2 = a^2 + b^2$) та між площами квадратів, які побудовані на сторонах цього трикутника ($Sc = Sa + Sb$).

1.2. Практичне значення ТП полягає і у тому, що за її допомогою можна не вимірюючи знайти довжини сторін прямокутного трикутника або площини квадратів, які побудовані на сторонах прямокутного трикутника:

$$(c^2 = a^2 + b^2) \leftrightarrow$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \sqrt{c^2 - b^2},\ b = \sqrt{c^2 - a^2};$$

$$(S_c = S_a + S_b) \leftrightarrow S_a = S_c - S_b,\ S_b = S_c - S_a.$$

Саме на цьому заснований поділ формулювань ТП на дві групи: «алгебраїчні» – «сучасні» та «геометричні» – за Евклідом.

1.3. Існує мінімум два десятки лише еталонних (з посиланням "як у підручнику або як у словнику") формулювань ТП, тобто пряме (вихідне) формулювання, обернене до нього, узагальнене формулювання, протилежне формулювання (див., наприклад [1–5, 8, 10, 11]).

Варіанти формулювань вихідної та оберненої ТП з урахуванням [6, 10] наведені у таблиці № 1, де п. 01 та п. 02, – це [8, Кн. І, Твердження № 47, с. 58] – пряма ТП і [8, Кн. І, Твердження № 48, с. 59] – обернена ТП.

Таблиця 1

1. Еталонні (базові) геометричні формулювання ТП за Евклідом [8]	
0.1) У прямокутному трикутнику площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах: $S_c = S_a + S_b$	0.2) Якщо у трикутнику площа квадрату на одній зі сторін дорівнює сумі площ квадратів на двох інших сторонах, тоді кут між цими сторонами є прямим
2. Вихідна (еталонна) ТП: п. А.1 – [1]; п. В.1 – [2]. Вітчизняні підручники	
А.1) У прямокутному трикутнику *квадрат гіпотенузи* дорівнює сумі *квадратів катетів*: $c^2 = a^2 + b^2$	В.1) У прямокутному трикутнику *квадрат гіпотенузи* дорівнює сумі *квадратів катетів*
3. Обернена ТП: п. А.2 – [1]; п. В.2 – [2]. Вітчизняні підручники	
А.2) Якщо в трикутнику зі сторонами a, b і c виконується рівність $c^2 = a^2 + b^2$, то такий трикутник прямокутний, при цьому прямий кут лежить проти сторони c	В.2) Якщо *квадрат однієї сторони* трикутника *дорівнює сумі квадратів двох інших сторін*, то трикутник прямокутний. *Примітка*: Не додається рівність $c^2 = a^2 + b^2$
4. Вихідна (еталонна) ТП, французький підручник [11, с. 24]	
"У прямокутному трикутнику *квадрат довжини гіпотенузи* дорівнює сумі *квадратів довжин його катетів*: $c^2 = a^2 + b^2$"	

5. Варіанти формулювань ТП, які є протилежними до формулювання ТП, розглянутих у п. 1–4 цієї таблиці. З урахуванням [3, с. 61–66]
5.1. "Не існує прямокутних трикутників, для яких не виконується будь-яка з умов, наприклад: ($S_c = S_a + S_b$); ($c^2 = a^2 + b^2$); ($c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot cos\ C$) – теорема косинусів, яка для прямокутного трикутника еквівалентна співвідношенню ($c^2 = a^2 + b^2$), тому що $cos C = cos 90^0 = 0$". 5.2. "Якщо не виконується умова ($c^2 = a^2 + b^2$) або інші еквівалентні рівності, наприклад ($Sc = Sa + Sb$) або теорема косинусів – ($c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot cos\ C$), тоді цей трикутник не є прямокутним"

Аналіз змісту таблиці № 1.

По-перше, доведення ТП не наводяться. Вони відомі з часів Евкліда [8] та є у всіх підручниках з геометрії. До речі, Архімед (287–212 рр. до н. е.) відкрите ним твердження у більшості випадків не доводив, щоб "*кожен математик мав задоволення самостійно отримати цей результат*" [1, с. 211].

По-друге, покажемо, що словосполучення "квадрат гіпотенузи", "квадрат катету" і "квадрати інших сторін" є некоректними.

Таким чином, за Евклідом та за будь-яким вітчизняним підручником з геометрії пряма лінія має лише довжину, межами її відрізків є точки. Отже, за допомогою відрізків прямої (у даному випадку гіпотенузи, катетів або "двох інших сторін") можна створювати геометричні фігури (у даному випадку – квадрати. Саме на цьому Евклід будує ТП як суму площ квадратів, побудованих на сторонах прямокутного трикутника: $Sc = Sa + Sb$.

З цієї позиції змістовним є формулювання (див. п. 4 табл. 1), у якому застосовуються словосполучення "квадрат довжини гіпотенузи" і "квадрати довжин катетів".

По-третє, звернемо увагу читача на зміст п. 5. Ще у 1977 р. у посібнику для студентів педагогічних інститутів (спеціальність № 2121 – "Педагогіка і методика початкової освіти") розглядалася трихотомія понять: пряма теорема, обернена теорема і протилежна теорема. До речі, на це ще раніше (1948) звертав увагу Д. Д. Мордухай-Болтовський у коментарях до праць Евкліда (див. [8, Кн. I, с. 294]). Однак у подальшому цей підхід чомусь зник.

Тому, якщо застосувати принцип трихотомії, тоді практично кожному прямому і оберненому формулюванню ТП можна поставити у відповідність принаймні один варіант протилежного формулювання ТП.

Виходячи із зазначеного вище аналізу, можна запропонувати наступні варіанти усунення некоректності формулювань ТП у вітчизняних підручниках.

1. Сформулювати ТП подібно [11, с. 24] з відповідним уточненням стосовно одиниць виміру довжин сторін трикутника і, тим самим, отримати вітчизняний варіант дефініції ТП: у будь-якому прямокутному трикутнику квадрат довжини гіпотенузи (c) дорівнює сумі квадратів довжин його катетів (a і b), тобто $\{[c^2]_x = [a^2]_x + [b^2]_x\}$, де $[...]_x$ – одиниця виміру довжин відрізків $[c]$, $[a]$, $[b]$".

Природно, можна застосувати різні варіанти цього формулювання ТП, але у будь-якому випадку бажано зберегти ключові, на наш погляд, словосполучення "у будь-якому прямокутному трикутнику", "квадрат довжини гіпотенузи", "квадрат довжини катету".

2. Залишити традиційні вітчизняні формулювання ТП, але наголосити, що це алгебраїчні варіанти формулювань ТП, яка є еквівалентною геометричному (за Евклідом) формулюванню ТП. Дійсно, $c^2 = Sc$; $a^2 = Sa$; $b^2 = Sb$. Тоді $(c^2 = a^2 + b^2) \sim (Sc = Sa + Sb)$, де ~ – знак еквівалентності. При цьому автори згодні із зауваженням В. Литцмана [10, с. 19], що різке розмежування окремих математичних дисциплін перешкоджає створенню комплексної лінії розвитку математики, тому це навряд чи варто вітати.

3. В обох випадках зміст вітчизняних підручників буде гармонізований зі змістом відповідних частин підручників держав-членів Європейського Союзу.

Дослідження підручників інших держав авторами не проводилося, але авторитет школи французьких геометрів не підлягає сумніву. Достатньо згадати лише систему координат Р. Декарта (1596–1650).

Дійсно, якщо розглядати систему координат Р. Декарта як дві прямі, які під прямим кутом перетинаються у одній точці (початку системи координат) і, тим самим, утворюють чотири прямих кути і чотири квадранта, для будь-якого з них можна сформулювати низку варіантів формулювань ТП:

— варіант формулювання прямої ТП: у будь-якому прямокутному трикутнику квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин її проекцій на осі відповідного квадранта системи координат Декарта;

— варіант формулювання оберненої ТП: якщо у трикутнику площа квадрату на гіпотенузі дорівнює сумі площ квадратів на двох її проекціях на осі відповідного квадранта системи координат Декарта, тоді цей трикутник є прямокутним;

— варіант формулювання протилежної ТП: не існує прямокутних трикутників, для яких не виконується умова – квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин її проекцій на осі відповідного квадранта системи координат Декарта.

Дійсно, довжини проекцій гіпотенузи ca і cb (наприклад, на OX і OY, перший квадрант) дорівнюють довжинам катетів a і b, тобто $ca = a$; $cb = b$.

З цього випливають рівності:

$(ca)^2 = a^2 = S(ca) = Sa$;

$(cb)^2 = b^2 = S(cb) = Sb$.

Звідси: $c^2 = (ca)^2 + (cb)^2 = a^2 + b^2$; $Sc = S(ca) + S(cb) = Sa + Sb$.

Відомі інші погляди на ці варіанти формулювання ТП (див., наприклад [4]) та дворівневий підручник для ЗНЗ [1, с. 139–140]. Однак у жодному з цих джерел не розглядається принцип трихотомії [3, с. 61–66], який є вкрай необхідним для абітурієнтів (і студентів!) ВНЗ педагогічного, технічного або академічного спрямування.

Частина № 2. Розглянемо варіанти формулювання ТП (див., наприклад, табл. 1) з точки зору вимог 4-рівневої 12-бальної шкали оцінювання навчальних досягнень учнів ЗНЗ.

2.1. Уведенням 4-рівневої 12-бальної системи оцінювання навчальних досягнень учнів ЗНЗ визнаний факт: “Будь-яке еталонне (базове, вихідне, офіційне) твердження, закон, правило тощо, наведене у навчально-методичній літературі, можна сформулювати мінімум у чотирьох варіантах: пряме твердження, твердження обернене до прямого, твердження протилежне до прямого та оберненого”.

2.2. Фактично 4-рівнева 12-бальна система оцінювання передбачає, що у відповідь на кожне еталонне (вихідне, офіційне) твердження вчитель може очікувати мінімум дванадцять варіантів (версій) індивідуального (учнівського) інтерпретування (тлумачення) еталонного (вихідного) твердження.

На практиці такий спектр варіантів індивідуальних (учнівських) інтерпретацій вихідних тверджень викладач отримує для аналізу й оцінювання:

а) від учнів, які або не вмотивовані навчатися, або нечітко (неоднозначно) усвідомлюють сутність вихідного твердження, або дійсно потребують допомоги викладача “народжувати” знання саме йому притаманного рівня;

б) від учнів з неординарним (креативним) типом мислення.

2.3. Перший варіант у педагогіці відомий під назвою "маєвтика[1]" (з грец. *maieutike* – акушерське, повивальне мистецтво) [9, с. 326.2-327.1]. Це один з прийомів сократівського методу встановлення істини. Сократ (469–399 рр. до н. е.), аналізуючи відповіді співрозмовника (учня), майстерно формулював послідовність запитань і, тим самим, допомагав співрозмовнику начебто самому народжувати нові для нього знання. Подібне робила Фенарета – мати Сократа, допомагаючи породіллі народжувати дитя.

Вважаємо за доцільне також наголосити на наступному. Базою сучасних (світських) методів проектів і проектної педагогіки [13] обґрунтовано можна вважати метод Хаврута – вивчення у парі іудейських релігійних текстів, наприклад Талмуду (у перекладі з івриту – *вивчення*). Тисячоліттям доведений майже до досконалості цей метод вивчення застосовується й досі (існує, наприклад, проект "Талмуд онлайн" та багато подібних) для розвитку здатності вчитися та вчити, включаючи вміння вести дискурс – цілеспрямовану тематичну дискусію/полеміку у всіх сферах життя (соціуму). У вузькому сенсі Хавруту можна розглядати як Сократівську бесіду/співбесіду, Сократівський діалог, мозковий штурм ("мозкову атаку"), метод проектів.

2.4. Приклади варіантів креативної інтерпретації ТП частково розглянуті у таблиці 1. Розглянемо подібні варіанти відповідей більш ретельно як приклад еволюційного переходу від вимог четвертого рівня 12-бальної шкали оцінювання до вимог "Абітурієнт ВНЗ педагогічного, технічного або академічного спрямування".

2.4.1. Узагальнена ТП: "Висота, проведена з вершини прямого кута до гіпотенузи трикутника Δ, ділить його на два подібні трикутники Δ_1 та Δ_2, кожний з яких подібний до вихідного прямокутного трикутника Δ".

Вочевидь, що при цьому виконуються співвідношення:

$(S_1 + S_2 = S)$; $(S_1 \sim S_2 \sim S)$; $(\Delta_1 \sim \Delta_2 \sim \Delta)$,

де ~ – знак подібності.

Однак якщо $(S_1 + S_2 = S)$, тоді можна записати $(S_1/S) + (S_2/S) = 1^2 = 1$.

Відповідні лінійні елементи (сторони) трикутників Δ_1, Δ_2, Δ є пропорційними, наприклад з коефіцієнтом пропорційності k. Природно, що площі цих трикутників відносяться як k^2. Тому, відношення будь-яких відповідних елементів подібних трикутників

[1] іноді замість назви "маєвтика" застосовують інші назви цього метода навчання: "Сократівська бесіда/співбесіда", "Сократівський діалог", "Теєтет" – один з діалогів Платона, створений приблизно у 369 р. до н. е.

Δ_1, Δ_2 і Δ можна записати у такому вигляді: $(t_1/t)^2 + (t_2/t)^2 = 1^2 = 1$. Якщо, наприклад, прийняти, що

$t_1 = a$, $t_2 = b_2$, $t = c$, тоді $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1^2 = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

2.4.2. "Наслідком ТП для прямокутного трикутника в тригонометричному крузі, радіус якого дорівнює гіпотенузі, є основна геометрична тотожність ($sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1^2 = 1$), яка виконується для довільного кута α будь-якого прямокутного трикутника".

2.4.3. Теорема Евкліда, яка розглядається як узагальнення ТП: "якщо на катетах і гіпотенузі прямокутного трикутника побудувати будь-які подібні фігури *A*, *B* і C, у яких катети й гіпотенуза трикутника є відповідними сторонами фігур *A*, *B* і C, то $Sa + Sb = S$, де *Sa*, *Sb* і *S* – площі побудованих фігур (рис. 1, 2). Зазначене вище див. [1, с. 211].

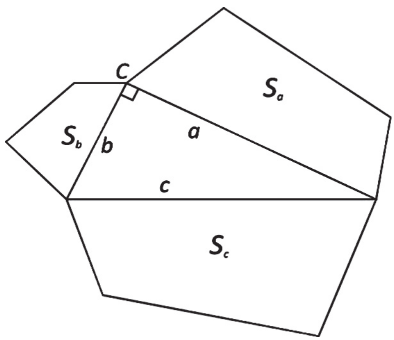

Рис. 1

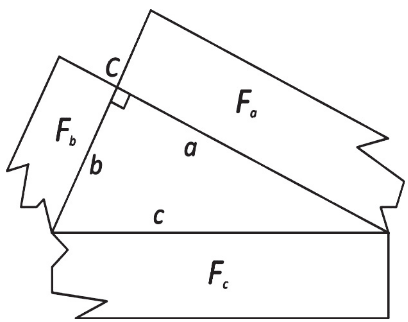

Рис. 2

Частина № 3. Відповідно до позиції точки доповнення системної цілісності поглядів на структуру, об'єм і зміст ТП розглянемо ще один прояв креативного мислення – створення емерджентних формулювань її означень/дефініцій.

Емерджентні (з англ. *emergent* – виникати, з'являтися несподівано) – формулювання, означення/дефініції теорем, стверджноаргументованих суджень, висловлювань тощо, які, на відміну від маєвтичних варіантів, створюються індивідуумом самостійно як інсайт-означення (інсайт-розуміння) і мають ознаки стрибкоподібного переходу від незнання до істинного знання, від нерозуміння до повного (всеосяжного) розуміння.

Емерджентні формулювання відображають нові властивості теореми, закону, явища тощо, які до цього часу були частково або повністю невідомими або непоміченими (неспостереженими), або їх розгляд не був передбачений чинними начальними програмами ЗНЗ та ВНЗ. Тому саме емерджентні формулювання адекватно відображають рівень знань і/або компетенції їх автора.

3.1. Доведення ТП за допомогою фізичного експерименту (з урахуванням [10, с. 46–47]).

Варіант № 3.1.1. Наприклад, відомо, що довжини сторін прямокутного (єгипетського) трикутника становлять 3, 4 і 5 одиниць вимірювання. На аркуші паперу (з зошиту "у клітинку" або на "міліметрівці") накреслимо три квадрати з довжинами сторін 3, 4 і 5 одиниць вимірювання (наприклад, 1 см).

Порахуємо число маленьких квадратиків/клітинок у кожному квадраті: № 1 – 9 одиниць (Sa = 9 см^2); № 2 – 16 одиниць (Sb = 16 см^2); № 3 – 25 одиниць (Sc =25 см^2). Якщо згадати геометричне або алгебраїчне формулювання ТП: ($Sc = Sa + Sb$) або {$[c^2]_x = [a^2]_x + [b^2\ ]_x$,}, де $[...]_x$ – одиниця виміру довжин відрізків [c], [a], [b]", тоді стають очевидними рівності: 25 см^2 = 9 см^2 + 16 см^2; $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Варіант № 3.1.2. З аркушу, наприклад, картону однакової лінійної щільності[2] виготовимо три квадрати A, B і C (див. варіант № 3.1.1).

3.2. Якщо на одну шальку терезів покласти два менших/легших квадрати, вага яких становить Pa і Pb, а на іншу шальку терезів – більший/важчий квадрат (Pc), рівновага терезів майже не

[2] точність фізичного експерименту залежить від виконавця, якості інструментів, точності терезів, сталості/постійності лінійної щільності матеріалу, з якого вирізаються квадрати тощо. Але якщо експеримент виконати декілька разів, то у середньому рівність буде виконуватися з достатньою для практики точністю і, тим самим, підтверджувати ТП, але лише для цього трикутника.

зміниться[3]. Тобто вага двох легших квадратів майже дорівнює вазі більшого квадрата: *Pc* ”ТП і теорема Евкліда розглядаються на евклідовій площі, товщина якої, як відомо, дорівнює нулю (d = 0). Тому розглянемо варіант застосування цих теорем для тривимірних (n = 3) геометричних і фізичних тіл, третій вимір яких, наприклад, товщина/висота $d > 0$ (рис. 3 та рис. 4).

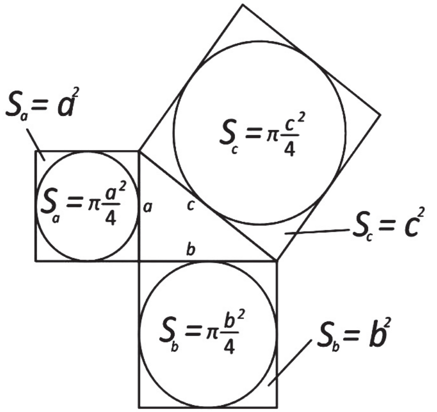

Рис. 3

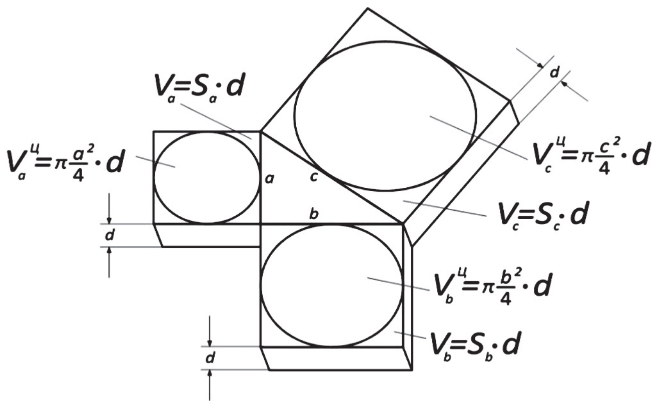

Рис. 4

[3] за допомогою фізичного експерименту неможливо переконливо довести ТП для будь-яких прямокутних трикутників: множина їх є нескінченою. Тому лише дедуктивні доведення, істинність яких виявляється тільки в результаті логічного міркування, що здійснюється як логічний перехід від істинних посилань (у даному випадку, евклідових аксіом) до істинного заключного твердження, наприклад, як одного з варіантів формулювань ТП.

Тут одразу необхідно зазначити, що випадок для геометричних тіл ($n \geq 3$) розглянутий [4], але при цьому не розглядаються фізичні тіла.

Тривимірні фізичні тіла за формою є подібними до геометричних фігур мають певну товщину/висоту ($d > 0$), масу ($m > 0$) та інші ознаки фізичних тіл. У даному випадку нас цікавить лише об'єм і вага.

Рисунок 3 – це демонстрація зв'язку між подібними геометричними фігурами: трьома квадратами та трьома колами у повній відповідності до ТП та узагальненої теореми Евкліда. Тобто є очевидним підтвердженням еквівалентності між ТП і узагальненою теоремою Евкліда.

Рисунок 4 – це демонстрація зв'язку між подібними тривимірними геометричними фігурами та фізичними тілами: трьома паралелепіпедами і трьома циліндрами. Подібність трійок фігур/тіл випливає з того, що: $(Sc \cdot d) = Vc$; $(Sa \cdot d) = Va$; $(Sb \cdot d) = Vb$. Якщо розглядати d – товщину/висоту фізичного тіла як множник, тоді, поділивши цю рівність на d, фактично повертаємося до попереднього (площинного) випадку $Sc = Sa + Sb$. Тому $Vc = Va + Vb$, що є підтвердженням еквівалентності між ТП і узагальненою теоремою Евкліда.

На підставі цих міркувань можна сформулювати низку тверджень, які для тривимірних геометричних фігур і фізичних тіл є еквівалентами ТП і теоремі Евкліда.

1. "Якщо на сторонах призми, перетин якої має форму прямокутного трикутника, побудувати будь-які подібні геометричні тіла *A*, *B* і C, які мають однакову висоту/товщину, тоді для об'ємів цих тіл буде виконуватися рівність: $Vc = Va + Vb$.

2. "Якщо на сторонах призми, перетин якої має форму прямокутного трикутника, побудувати будь-які подібні фізичні тіла *A*, *B* і C, які мають однакову щільність і висоту, тоді для цих фізичних тіл будуть виконуватися рівності: $(Vc = Va + Vb)$; $(m_c = ma + mb)$; $(Pc = Pa + Pb)$.

Ці рівності виконуються, тому що параметри фізичних тіл *A*, *B* і C зв'язані співвідношеннями:

— $P = V\rho$, де ρ – питома густина речовини ([кг/м^3]), з якої виготовлені ці фізичні тіла;

— $P = mg$, де g – прискорення вільного падіння тіл, [$g = 9{,}85$ м/с^2].

Окрім того, ρ та g можна розглядати як константи (коефіцієнти), тобто вони не впливають на подібність фізичних тіл.

Природно, що можна створити обернені та протилежні формулювання двох останніх тверджень.

Пропонуємо читачам зробити це самостійно і, тим самим, переконатися у ефективності одного з базових положень цієї статті: кожне твердження, теорему, закон тощо можна переформулювати, головне – зберегти адекватність змістів новоутворення і першоджерела.

Висновки

1. Наявна 4-рівнева 12-бальна шкала оцінювання навчальних досягнень учнів ЗНЗ може з однаковою ефективністю застосовуватися для оцінювання, на перший погляд, різних варіантів узагальнень, інтерпретувань, тлумачень вихідних (еталонних, базових) тверджень, теорем, законів тощо. А саме:

1.1. традиційних ("трансформаційних") формулювань, тобто формулювань, які повністю або частково у відповідності до певного рівня індивідуальних знань та компетенцій трансформують структуру, об'єм і зміст вихідного (еталонного, базового) формулювання, наведеного у навчально-методичній літературі;

1.2. маєвтичних формулювань, тобто таких, що створені за допомогою вчителя, викладача або репетитора;

1.3. емерджентних формулювань, які самостійно створені саме учнем (абітурієнтом) як інсайт-означення (інсайт-розуміння) і тому адекватно відображають рівень знань та компетентності їх автора.

1. Уведення до арсеналу педагогічних технологій подібної класифікації варіантів формулювань:

1.1. переводить формулювання учня (абітурієнта) у "офіційну площину", забезпечуючи, тим самим, можливість їх оцінювання за допомогою існуючої 4-рівневої 12-бальної шкали оцінювання навчальних досягнень учнів ЗНЗ; а також враховує п'ятий рівень, орієнтований на продовження змістовних ліній у вимогах до абітурієнтів вищих навчальних закладів педагогічного, технічного або академічного спрямування;

1.2. забезпечує розширення та вдосконалення культури мислення, ефективності ситуативного (різнорівневого) спілкування: або за допомогою еталонних термінологічних одиниць, понять, категорій, або з використанням їх еквівалентів (варіантів інтерпретацій, тлумачень).

Перспективи подальшого розвитку у зазначеному напрямі.

1. Розробка, вдосконалення та впровадження структури універсальних тестових завдань і тестів на базі багаторівневих ε-понять.

2. Комплексний (кумулятивний) розвиток програми “Школа майбутнього” [1] на базі способу “Драгоманівський” [12] та “Індивідуально-колективної технології навчання в середовищі традиційної класно-урочної-предметної системи освіти (українська версія)” [7].

Література

1. Апостолова Г. В. Геометрія: 8: дворів. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Г. В. Апостолова. – К. : Генеза, 2008. – 272 с.
2. Бурда М. І. Геометрія : навч. посіб. для 8–9 кл. шк. з поглибл. вивч. Математики / М. І. Бурда, Л. М. Савченко. – 3-е вид. – К. : Освіта, 2001. – 240 с.
3. Виленкин Н. Я. Математика : учебн. пособ. для студ. пед. институтов по специальности № 2121 – “Педагогика и методика начального обучения” / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская, Л. П. Стойлова. – М. : “Просвещение”, 1977. – 352 с.
4. Грицай М. Г. Перша квадратична форма поверхні як узагальнення теореми Піфагор / М. Г. Грицай , В. Д. Зоря // Науково-дослідна робота студентів як чинник удосконалення професійної підготовки майбутнього вчителя : зб. наук. пр. / [редкол. : Л. І. Білоусова та ін.]. – Х. : Віровець А. П. “Апостроф”, 2013. – Вип. 9. – 168 с.
5. Депман И. Я. Забытое издание “Начал” Евклида на русском языке / И. Я. Депман // Историко-математические исследования. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1950. – № 3. – С. 467–474.
6. Жабєєв Г. В. Структура табличного тесту з фізики в дистанційному навчанні // Образование и виртуальность – 2004 : сборник научных трудов 8-й Международной конференции Украинской ассоциации дистанционного образования. – Харьков-Ялта : УАДО, 2004. – С. 343–348.
7. Жабєєв Г. В. Індивідуально-колективна технологія навчання в середовищі традиційної класно-урочно-предметної системи освіти (українська версія) / Г. В. Жабєєв, П. В. Жабєєв. – 10 с. Твір зареєстрований Державною службою інтелектуальної власності України 16.01.2016, № 65039.
8. Книги Евклида: I–VI, VII–X, XI–XV / перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выготского и И. Н. Веселовского. – ОГИЗ. М.-Л. – 1948–1951.
9. Кондаков Н. И. Логический словарь : справочник. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1975. – 720 с.
10. Литцман В. Теорема Пифагора / В. Литцман ; пер. с нем. В. С. Бермана ; под редакцией И. М. Яглома. – М. : ГИФМЛ, 1960. – 114 с.
11. Mathématiques Idem de Lorraine, 4[E], Livre du maitre (Fr). Responsables de la collektion: Philippe Lombard, Michele Muniglia. Les Editions Dider, 1988, 256 p.
12. Патент України № 95694, МПК (2014.01). G09B 5/00, G09B 19/00. Спосіб інтерактивного діалогового навчання, педагогічного тестування, атестування “Драгоманівський” / Г. В. Жабєєв, П. В. Жабєєв – заявники-па-

тентовласники – №u 2014 10889; заявл.06.10.2014, опубл. 25.12.2014, Бюл. № 24, 2014 р.
13. Проектна педагогіка в інноваційному полі освіти : практично-зорієнтований посібник / головний редактор, керівник авторського колективу, канд. пед. наук В. І. Сафіулін ; науковий редактор – доктор пед. наук, професор В. Ф. Паламарчук. – К. : Освіта України, 2008. – 254 с.
14. Розпорядження Кабінету Міністрів України від 13 травня 2007 року № 160-р, Київ, "Про схвалення Концепції Державної цільової соціальної програми "Школа майбутнього" на 2007–2010 роки" [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/160-2007-р.

References.

1. Apostolova H. V. Heometriia : 8 : dvoriv. pidruch. dlia zahalnoosvit. navch. zakl. / H. V. Apostolova. – K. : Heneza, 2008. – 272 s.
2. Burda M. I. Heometriia : navch. posib. dlia 8–9 kl. shk. z pohlybl. vyvch. matematyky. / M. I. Burda, L. M. Savchenko. – 3-e vyd. – K. : Osvita, 2001. – 240 s.
3. Vilenkin N. Y. Matematika : uchebn. posobie dlja studentov ped. institutov po special'nosti No 2121 – "Pedagogika i metodika nachal'nogo obuchenija" / N. Y. Vilenkin, A. M. Pyshkalo, V. B. Rozhdestvenskaja, L. P. Stojlova. – M., "Prosveshhenie", 1977. – 352 s.
4. Hrytsai M. H. Persha kvadratychna forma poverkhni yak uzahalnennia teoremy Pifahor / M. H. Hrytsai, V. D. Zoria // Naukovo-doslidna robota studentiv yak chynnyk udoskonalennia profesiinoi pidhotovky maibutnoho vchytelia : zb. nauk. pr. / [redkol. : L. I. Bilousova ta in]. – Kh. : Virovets A. P. "Apostrof", 2013. – Vyp. 9. – 168 c.
5. Depman I. Y. Zabytoe izdanie "Nachal" Evklida na russkom jazyke / I. Y. Depman // Istoriko-matematicheskie issledovanija. – M.-L. : GITTL, 1950. – No 3. – S. 467–474.
6. Zhabieiev G. Struktura tablychnoho testu z fizyky v dystantsiinomu navchanni / G. Zhabieiev // Obrazovanye y vyrtualnost – 2004 : sbornyk nauchnyh trudov 8-y Mezhdunarodnoi konferentsyy Ukraynskoi assotsyatsyy dystantsyonnoho obrazovanyia. – Kharkov-Yalta : UADO, 2004. – S. 343–348.
7. Zhabieiev G Indyvidualno-kolektyvna tekhnolohiia navchannia v seredovyshchi tradytsiinoi klasno-urochnoi-predmetnoi systemy osvity (ukrainska versiia) / G. Zhabieiev, P. Zhabieiev. – 10 s. Tvir zareiestrovanyi Derzhavnoiu sluzhboiu intelektualnoi vlasnosti Ukrainy 16.01.2016, No 65039.
8. Knigi Evklida: I–VI, VII–X, XI–XV / perevod s grecheskogo i kommentarii D. D. Morduhaj-Boltovskogo pri redakcionnom uchastii M. Ja. Vygotskogo i I. N. Veselovskogo. – OGIZ. M.-L., 1948–1951.
9. Kondakov N. I. Logicheskij slovar' : spravochnik. – 2-e izd., isp. i dop. / N. I. Kondakov. – M. : Nauka, 1975. – 720 s.
10. Litcman V. Teorema Pifagora / V. Litcman ; per. s nem. V. S. Bermana ; pod red. I. M. Jagloma. – M. : GIFML, 1960. – 114 s.
11. Mathématiques Idem de Lorraine, 4[E], Livre du maitre (Fr). Responsables de la collektion: Philippe Lombard, Michele Muniglia. Les Editions Dider, 1988, 256 p.

12. Patent Ukrainy № 95694, MPK (2014.01). G09B 5/00, G09B 19/00. Sposib interaktyvnoho dialohovoho navchannia, pedahohichnoho testuvannia, atestuvannia “Drahomanivskyi” / G. Zhabieiev, P. Zhabieiev – zaiavnyky-patentovlasnyky – №u 2014 10889; zaiavl.06.10.2014, opubl. 25.12.2014, Biul. №24, 2014 r.
13. Proektna pedahohika v innovatsiinomu poli osvity : praktychno-zoriientovanyi posibnyk / holovnyi redaktor, kerivnyk avtorskoho kolektyvu, kand. ped. nauk V. I. Safiulin ; naukovyi redaktor – doktor ped. nauk, profesor V. F. Palamarchuk. – K. : Osvita Ukrainy, 2008. – 254 s.
14. Rozporiadzhennia Kabinetu Ministriv Ukrainy vid 13 travnia 2007 roku № 160-r Kyiv, “Pro skhvalennia Kontseptsii Derzhavnoi tsilovoi sotsialnoi prohramy “Shkola maibutnoho” na 2007-2010 roky” [Elektronnyi resurs]. – Rezhym dostupu: http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/160-2007-p

Жабеев Г. В., *Жабеев П. В.*

МНОГОУРОВНЕВЫЕ ПОНЯТИЯ – БАЗОВЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ (НА ПРИМЕРЕ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА)

В статье рассматривается пример создания многоуровневых понятий, сквозное применение которых в учебно-воспитательном процессе является одним из залогов успешной реализации украинского варианта концепции “Школа будущего”. Обосновывается целесообразность применения многоуровневых понятий, каждое из которых имеет, по крайней мере, пять уровней сложности. Примером для создания многоуровневого понятия выбрана теорема Пифагора. Ее прямая, обратная и противоположная формулировка является базой для: традиционных формулировок, которые полностью или частично трансформируют структуру, объем и содержание соответствующей исходной формулировки; майевтических формулировок, которые созданы с помощью учителя; эмерджентных формулировок, которые созданы учеником как инсайт-определение и адекватно отражают уровень знаний и компетентности их автора.

Ключевые слова: учебная программа; интерпретация; многоуровневые понятия; теорема Пифагора; прямая, обратная, противоположная, индивидуально-уровневая формулировка.

Zhabieiev G., *Zhabieiev P.*

MULTI-LEVELED CONCEPTS – BASIC COMPONENTS OF CURRICULUM AND TUTORIALS (PYTHAGOREAN THEOREM AS AN EXAMPLE)

In this article, we consider an example of employing of multi-level concepts. Interdisciplinary use of these concepts in the educational process is a guarantee of successful implementation of Ukrainian version of “School of the Future”. We

substantiate practicability of employment multi-leveled concepts that have at least five levels of complexity. Four levels are correspond to 4-level 12-grade evaluation scale that is used for grading educational accomplishments in regular school system, whereas fifth level corresponds to advanced level required for enrollee of post-secondary educational institutions of educational, technical, or academic specializations.

As an example of multi-leveled concept (ε-concept), we have used Pythagorean theorem in its regular and reverse formulations to consider following alternative formulations:

– traditional ("transformational") formulations which transform or adapt content of standard formulation to the knowledge level of the student in accordance with requirements of educational literature;

– maieutical formulations (Socratic method) which are created in the interaction of student with teacher or tutor;

– emergent formulations which are created by student as insight-formulation; such formulations reflect new aspects of multi-level concept that were partially or completely overlooked or were not a part of curriculum. This class of formulations reflects knowledge level of the author of the formulation.

This classification of formulation of theorems, laws, and statements provides improvements of thinking approaches of students and increases effectiveness of interaction between student and teacher.

These are achieved by employing standard terminology (concepts and categories) or its equivalencies (interpretations).

Keywords: curriculum; interpretation; multi-level concepts; Pythagorean theorem; regular, reverse, alternative and individual-level formulations.

УДК 371.832

ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНІ ТА МІЖПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ ЯК ЗАСІБ НАБУТТЯ ДОСВІДУ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ ПРАВОЗНАВСТВА

Н. М. Жидкова,
кандидат педагогічних наук,
учитель історії та правознавства
Менської районної гімназії Чернігівської обл.

У статті розкриваються можливості підручників із правознавства 9 та 10 класів для набуття досвіду навчальної діяльності учнів. Обґрунтовується