УДК 519.2

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗМІРУ ЗБИТКІВ В СТРАХУВАННІ

Тетяна Зінькевич,
канд. ек. наук, доцент кафедри фінансів підприємств ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»
Валентина Лісовська,
канд. фіз. - мат. наук, доц., заст. зав. кафедри вищої математики ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»

В статті розглянуто актуальність проведення актуарних розрахунків в страхуванні, важливість вірного вибору та побудови математичної моделі при розрахунку збитків страхової компанії.

Постановка проблеми. Страхування - це спосіб захисту майнових інтересів громадян та суб'єктів господарювання. Особливо зростає його роль в умовах ринкової економіки. Кожен суб'єкт господарювання має знати, як можна зменшити вплив ризику в його діяльності. В той же час, страхова діяльність є прибутковим різновидом підприємництва, а отже потребують вивчення питання формування доходів страхових компаній.

Як правило, питання грошових потоків в страхуванні, формування і використання доходів, прибутку, оптимізація витрат досліджують в цілому на рівні страхових компаній. В той же час, актуальним та важливим є дослідження даних питань за окремими видами страхування та напрямками формування доходів, витрат страховика.

Важливим аспектом управління фінансами в страхових компаніях є формування оптимізація витрат страховика. В свою чергу, актуальним є використання математичного апарату при побудові моделі визначення, оптимізації, планування витрат страхової компанії.

Математичному моделюванню різних процесів в даний час приділяється достатньо більше уваги. Це пов'язано з тим, що в останні роки в нашій країні відбулись значні зміни в області використання математики в різних галузях економіки. Перехід до ринкових умов змусив перенести інтереси спеціалістів з прикладної математики в нові галузі як на мікроекономічному рівні, так і на макроекономічному рівні. Однією з таких областей стала актуарна математика, або математика, пов'язана зі страхуванням. В переліку проблем, які доводиться вирішувати, знаходиться питання побудови моделі страхової компанії в цілому та за доходами, видатками окремо.

При дослідженні моделі страхової компанії в цілому та визначенні характеристик її роботи виникають ряд завдань, що є важливими в практичному аспекті.

Основний матеріал дослідження. Якщо припустити, що економіко-математична модель передбачає, що протягом часу, коли зовнішні чинники (зокрема, інфляція) змінюються незначним чином, то випадкові величини розміру збитку в окремому страховому випадку даного портфеля незалежні і однаково розподілені. Якщо припущення незалежності після деяких перетворень (наприклад, складання виплат по одному клієнтові) визнається виконаним, то припущення однакової розподіленості буде хибним із-за відмінності страхових сум.

Звичайно, кожному виду страхування і кожному портфелю відповідає свій розподіл збитків, залежний, зокрема, не тільки від розмірів страхових сум по окремих ризиках, а і від страхованих подій. Наприклад, середній збиток від пожежі на промисловому підприємстві значно вищий, ніж від пожежі в житловій будівлі. Проте, як показує практика, структури збитків у всіх видах страхування дуже схожі. Зазвичай спостерігається набагато більше дрібних збитків, чим більших. Отже, «концентрація збитків» із збільшенням розміру збитку все сильніше зменшується. Правда, кількісне співвідношення великих і дрібних збитків у різних видах страхування - різні.

В таблиці 1 наведено приклад емпіричного розподілу розміру збитку у вогневому страхуванні сталеливарних заводів (розміри збитків обчислюються в тисячах) [1, с. 69].

Таблиця 1

Емпіричний розподіл розміру збитків у страхуванні сталеливарних заводів [1, с. 71]

Збитки зверху	Доля в сукупній кількості, %	Доля в сукупному розмірі, %
6500	0.1	19
750	1.1	50
48 (середнє значення)	12.4	87

З таблиці 1 видно, що великі збитки мають вирішальну економічну вагу. Не дивлячись на істотне кількісне переважання дрібних збитків (більше 85% збитків знаходяться нижче середнього рівня), їх сумарний вклад в сукупний збиток складає менше 15%.

В цьому випадку не можна говорити про нормальний розподіл із-за виключення негативних збитків та відсутності симетричної форми, тоді як типовий розподіл розміру збитку має правосторонню асиметрію із-за істотного переважання дрібних збитків.

В той же час нормальний та інші розподіли теоретично допускають великі збитки, тоді як в страховій практиці розміри збитків часто обмежені зверху, наприклад, максимальною для даного портфеля страховою сумою. Для багатьох практичних завдань найбільш важлива адекватність моделі розподілу розміру збитку в області великих збитків. Варто відзначити, що найкращими розподілами виявилися логнормальний розподіл, які часто використовуються відповідно для моделювання ознак з сильним впливом великих значень і з сильною асиметрією у бік малих значень.

У статистичних страхових моделях використовуються розподіли випадкової величини (далі в. в.), які є функціями від в. в. нормального розподілу. Основні з них, які застосовуються в критеріях порівняння статистичного розподілу - статистик з теоретичним (гіпотетичним) є: x^2 – розподіл Пірсона, t – розподіл Стьюдента і F - розподіл Фішера, а також логарифмічно нормальний закон розподілу.

Доведення розподілу цих статистик випливає із гамма- і бета-розподілів.

Нехай в. в. Y нормально розподілена $N(a,\sigma)$. Запишемо її диференціальну функцію [4]:

$$f(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Знайдемо диференціальну функцію $f(x)$ невід ємної в. в. $X = e^Y$. Оскільки функція $x=\psi(y)$ монотонна на проміжку $x\in(0,\infty)$, то на цьому проміжку вона вона має обернену функцію $y=\ln x$.

Тоді маємо:

$$f(x)=f(\psi(y))|\psi'(y)|=f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}. \quad (2)$$

Отже, враховуючи (1), одержимо диференціальну функцію:

$$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in(0,\infty). \quad (3)$$

Розподіл (3) називається логарифмічно нормальним (логнормальним). Криві логнормального розподілу при різних значеннях σ зображені на рис. 1. Цей розподіл асиметричний і коефіцієнт асиметрії a_S зростає зі зростанням σ.

Оскільки інтегральна функція розподілу

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{(\ln u-a)^2}{2\sigma^2}}\frac{du}{u}=\left|\begin{matrix}\ln u=v,\\ \frac{du}{u}=dv\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{(v-a)^2}{2\sigma^2}}dv=F(y) \quad (4)$$

збігається з функцією нормального розподілу для то обчислення на основі логнормального розподілу виконується за допомогою таблиці значень функції Лапласа.

Зокрема, в страхових моделях користуються деякою модифікацією логнормального розподілу вигляду:

$$f(x)=\frac{1}{(x-\alpha)\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln(x-\alpha)-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in(\alpha,\infty). \quad (5)$$

Розглянемо числові характеристики логнормального розподілу:

А) математичне сподівання:

$$M(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$\left|\begin{matrix}\ln x-a=\sigma t,\ \ -\infty<t<\infty\\ x=e^{\sigma t+a},\ dx=e^{\sigma t+a}\sigma dt\end{matrix}\right|=$$

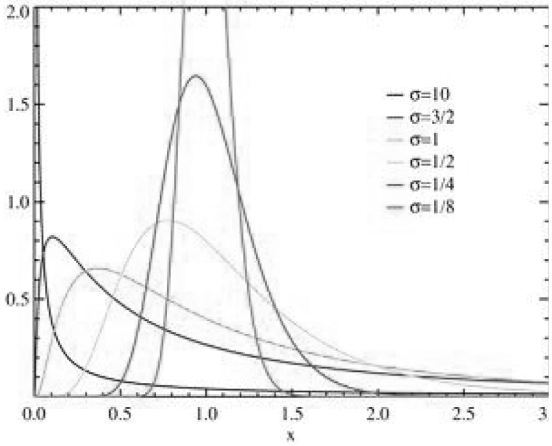

Рис.1. Диференціальні функції логнормального розподілу

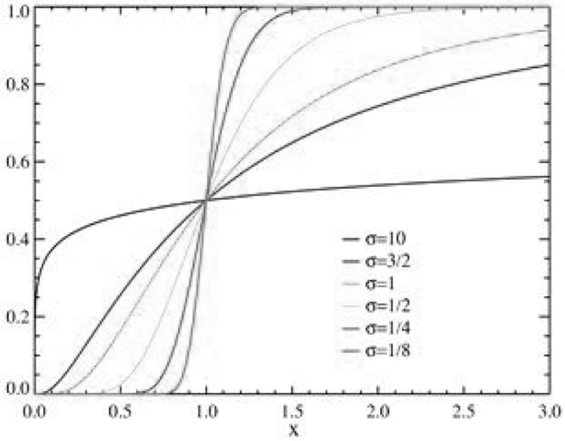

Рис.2. Інтегральні функції логнормального розподілу

$$= \frac{e^{a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+\sigma t} dt = \left| -\frac{t^2}{2} + \sigma t = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{(t-\sigma)^2}{2} \right| =$$

$$= \frac{e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt,$$

де $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ - інтеграл Пуассона.

Таким чином,

$$M(X) = e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}. \qquad (6)$$

Б) дисперсія.

Знайдемо:

$$M(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{\ln x - a}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \dfrac{\ln x - a}{\sigma} = t, \; x = e^{\sigma t + a}, \\ -\infty < t < \infty, \; dx = e^{\sigma t + a}\sigma dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{e^{2a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+2\sigma t} dt =$$

$$= \left| -\frac{t^2}{2} + 2\sigma t = 2\sigma^2 - \frac{(t-\sigma)^2}{2} \right| =$$

$$= \frac{e^{2a+2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = e^{2a+2\sigma^2};$$

Тоді за формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = e^{2(a+\sigma^2)} - e^{2a+\sigma^2}. \qquad (7)$$

Звідси знаходимо:

$$D(X) = e^{2a+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right). \qquad (8)$$

Доцільним є дослідження емпіричного розподілу розміру збитку у страхуванні за окремими видами страхування, групами витрат, що не пов’язані зі страховими виплатами.

Доцільним є здійснення оцінки параметри розподілу методом моментів. Моменти випадкової величини є її числовими характеристиками. Суть методу моментів полягає в тому, що якщо для даного розподілу існують вирази, що зв'язують параметри розподілу з його моментами, то, прирівнюючи моменти вибіркових даних до моментів теоретичного розподілу, отримаємо систему рівнянь, вирішивши яку знайдемо шукані параметри. На відміну від методу максимальної правдоподібності метод моментів дуже простий і не вимагає громіздких обчислень. Недолік методу в тому, що він не завжди працює. Наприклад, для того ж гамма-розподілу на деяких вибіркових даних виходять зовсім невірні результати.

Для оцінки, наскільки добре логнормальний розподіл підходить до вибіркових даних, побудуємо графіки щільності (рис.3) і розподілу (рис.4).

Можна сказати, що у випадку страхових премій логнормальний розподіл помітно краще описує вибіркові данні, ніж інші розподіли.

В свою чергу, при виборі моделі розрахунків та при проведенні розрахунків витрат в страхових компанія, важливим та актуальним є питання наявності необхідної інформації в динаміці для проведення розрахунків. В різних галузях економіки, і в тому числі в страхуванні, якісне інформаційне забезпечення відіграє вагому роль в діяльності організації. Діяльність страхових компаній залежить від оперативного збору, якіс-

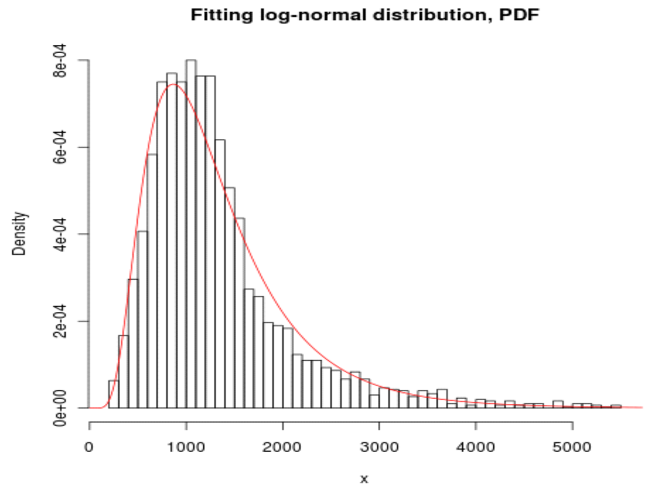

Рис.3. Диференціальна функція логнормального розподілу

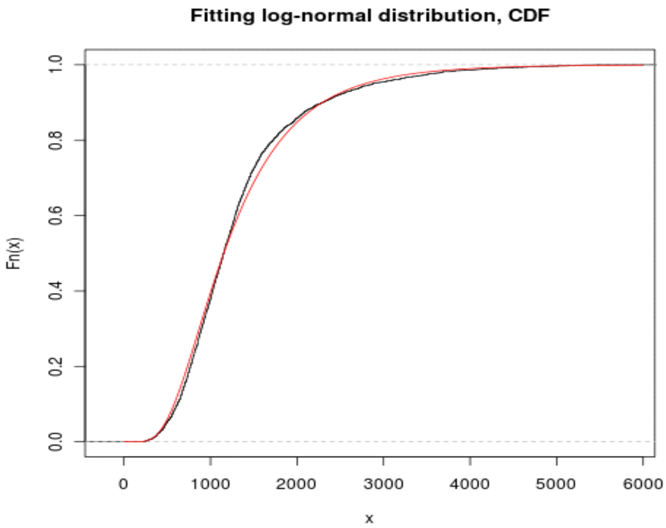

Рис.4. Інтегральна функція логнормального розподілу

ного аналізу та оброки великої інформаційної бази.

Інформаційне забезпечення розрахунків тарифів, виплат для кожного виду страхових послуг має свої особливості. Зміст інформаційної бази за окремим видом страхування залежить від специфічних умов страхування, об'єктів страхування, термінів страхування, вибірки страхових випадків, розмірів страхових виплат тощо.

Отже, основою побудови алгоритмів актуарних розрахунків, як зазначалось, є математичні моделі. Крім вірно підібраного математичного алгоритму необхідно мати широку та детальну інформаційну базу, поєднання якої з математичним апаратом дасть можливість сформувати економіко-математичні моделі розрахунку тарифів, виплат по окремим видам страхування, аналізу та оптимізації структури страхового портфелю, аналізу платоспроможності компанії, її фінансової стійкості тощо.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Т. Мак.* Математика ризикового страхування, М.: ЗАТ «Олімп-бізнес», 2005.

2. *Фалин Г.И.* Математический анализ рисков в страховании. - М.: Российский юридический издательский дом, 1994.

3. *Карри И.* Прикладная статистика. - М.: «Сов. Ит. Ас.», 1994.

4. Блудова Т.В. Теорія ймовірностей. Навч.пос. - Львів: ЛБІ НБУ, 2005. - 318с.

5. *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики. - М.: Дело, 1998.

6. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.* Актуарная математика. - М.: «Янус-К», 2001.

РЦПУ